De endelige Transformations-Gruppers Theori.

Af

H. Valentiner.

Avec un résumé en français.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. V. 2.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1889.

Indholdsfortegnelse.

Indledning.

Nærværende Afhandling er fremkaldt ved den af Videnskabernes Selskab 1884 stillede og 1886 gjentagne Prisopgave, og indleveret som Besvarelse af denne 1887. Denne Besvarelse var imidlertid paa Grund af en i sidste Afsnit indløbet Fejl ufuldstændig, og det blev nødvendigt at omarbejde hele dette Afsnit. Ved nøjere Gjennemsyn fandt jeg imidlertid, at heller ikke de første Afsnit tilfredsstillede mig, saa at, uagtet Videnskabernes Selskab havde tilstedet mig Optagelsen af disse i sine Skrifter, disse nu ogsaa bleve fuldstændigt omarbejdede, og det hele Arbejde saaledes fremtræder i en ny Skikkelse. Imidlertid har jeg søgt at bevare saa meget som muligt af det oprindelige Arbejde.

Det havde været min Hensigt at fremstille alle endelige Transformations-Grupper for Planet og for Rummet.

Det er imidlertid ikke lykkedes mig at naa videre end til en, som jeg haaber, fuldstændig Fremstilling af alle de endelige Transformations-Grupper for Planet. De samme Principper, som her ere anvendte for at fremstille alle de Grupper, der ere endelige for Planet, maatte ogsaa kunne anvendes for Rummet. Imidlertid er Theorien, trods sin Simpelhed i Princippet, saa vanskelig at anvende selv for Planets Vedkommende, at jeg antager, det næsten vil være uoverkommeligt at anvende den paa Rummet, hvor der for øvrigt vilde komme nye Vanskeligheder til, der endnu ikke optræde ved Bestemmelsen af Grupperne for den rette Linie eller Planet.

Foruden at bestemme de endelige Grupper for Linien og Planet, har jeg givet en Fremstilling af den almindelige Form en Transformation maa have, naar den hører til en endelig eller diskontinuert Gruppe og transformerer en n-dobbelt-∞ Punktmængde til sig selv.

De endelige Gruppers Theori er for den rette Linies Vedkommende for lang Tid siden givet af Klein, men, saa vidt jeg ved, aldrig før fremstillet, uden at være støttet paa rumgeometriske Betragtninger. I denne Afhandling fremstilles den i Fuldstændighed alene støttet paa algebraiske Betragtninger.

Hører der til en Gruppe en Transformation A, og er B en vilkaarlig Transformation i Gruppen, og dannes alle Transformationerne BAB^{-1}, idet for B efterhaanden sættes alle de til Gruppen hørende Transformationer, kalder jeg alle de saaledes fremkomne Transformationer for den til A hørende Samling.

Er A en Transformation, der ved at gjentages n Gange bliver identisk, kalder jeg den af n^{te} Orden, og alle de Transformationer der høre til samme Samling som A blive da af samme Orden. For den rette Linie gjælder følgende:

Enhver Transformation lader 2 Punkter af den rette Linie uforandrede, disse kaldes Transformationens Dobbeltpunkter. Er der ingen Transformation af højere end n^{te} Orden, der har samme Doppeltpunkter som A, vil den Samling, der hører til A, indeholde $\frac{N}{n}$ Transformationer, naar $n > 2$ og Gruppen i det hele indeholder N Transformationer.

Eftersom der saa gives eller ikke gives en anden Transformation i Gruppen, som ombytter A's Dobbeltpunkter, ville alle de Samlinger, der tilhøre A og dens Potenser udgjøre $\frac{(n-1)N}{2n}$ eller $\frac{(n-1)N}{n}$ Transformationer.

For at finde alle de endelige Grupper, hvis Transformationer transformere en ret Linie til sig selv, behøver man da kun at finde de positive hele Tal, som tilfredsstille Ligningen

$$N\Sigma\frac{n-1}{n} + N\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1} + 1 = N$$

eller

$$\frac{1}{N} = 1 - \left(\Sigma\frac{n-1}{n} + \Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}\right),$$

der fremkomme ved den Betragtning, at Gruppen foruden de Samlinger, der høre til den, endnu indeholder én Transformation: den identiske.

Det bemærkes dog, at ikke alle Tal, der tilfredsstille denne Ligning, give virkeligt existerende Grupper.

Man ser, at Antallet af Transformationer i Grupper enten maa være det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de i Gruppen indgaaende Transformationer eller dette Tal multipliceret med 2.

Hvad Planen angaar, kunne her lignende Betragtninger anstilles som for den rette Linie, kun blive Forholdene her langt mere komplicerede, navnlig paa Grund af, at der kan optræde perspektiviske Transformationer.

Medens nemlig i Almindelighed enhver lineær Transformation, der transformerer Planen til sig selv, lader 3 Punkter af Planet (Transformationens Dobbeltpunkter) blive uforandrede, existerer der Transformationer, der lade alle Punkter af en ret Linie uforandrede. Det er saadanne Transformationer, som kaldes perspektiviske.

De nye Vanskeligheder opstaa nu ved, at medens i Almindelighed Potenser af Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter atter ere forskjellige, kan den samme perspektiviske Transformation være en Potens af flere Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter. Det vises nu først, at alle Transformatiener, der fremkomme i en endelig Gruppe, kunne bringes paa en saadan Form, at, hvis

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

er en saadan Transformation, Transformationsdeterminanten

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1,$$

og at i denne Determinant ethvert Element (a_1) er konjugeret med sin Underdeterminant (A_1), saa at altsaa $a_1 = \overline{A}_1$.

Ved en cyklisk Gruppe forstaas en Gruppe, hvis Transformationer alle enten lade Dobbeltpunkterne for en bestemt Transformation uforandrede eller ombytter disse indbyrdes.

Det vises da, at hvis en endelig Gruppe for en Plan ikke skal være cyklisk eller saaledes beskaffen, at alle Transformationer i Gruppen transformere samme rette Linie til sig selv, kan Gruppen ikke indeholde perspektiviske Transformationer af højere end 2den Orden. (Enhver Transformation af 2den Orden er altid perspektivisk.)

Dernæst undersøges, hvor vidt Gruppen kan indeholde en perspektivisk Transformation, som er en Potens af flere Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter.

Det viser sig da, at der muligvis existerer en Gruppe paa 72 Transformationer, indeholdende Transformationer af 2den, 3die og 4de Orden, hvor Transformationerne af 4de Orden 6 og 6 have en fælles 2den Potens. Denne Gruppe vises siden virkeligt at existere.

Idet vi derpaa definere en Samling hørende til en Transformation A paa samme Maade som før, viser det sig, at de Samlinger som høre til alle de Transformationer, som have fælles Dobbeltpunkter med A, indeholde

$$\frac{n-1}{n}N, \quad \frac{n-1}{2n}N, \quad \frac{n-1}{3n}N$$

Transformationer, naar der er n Transformationer, der have fælles Dobbeltpunkter, og naar ikke 2 Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter have en fælles Potens, idet N er Antallet af Transformationer i Gruppen. De tre Antal faaes, eftersom der ikke gives nogen Transformation i Gruppen, der ombytter Dobbeltpunkterne for A, eller der gives en Transformation, der ombytter 2 af dem, eller endelig en Transformation, der kredsforskyder Dobbeltpunkterne.

Dette sidste finder kun Sted, naar Ordenen af A indeholder Faktorerne 2, 3 eller Primtal af Formen $3p + 1$.

Er Ordenen af A 3, kan der være baade en Transformation i Gruppen, der kredsforskyder A's Dobbeltpunkter, og en anden, der kun ombytter to af dem; forudsat at ingen Transformation af en anden Orden end 3 har samme Dobbeltpunkter som A.

Antallet af Transformationer i de Samlinger, der tilhøre A og dens Potenser, blive i dette Tilfælde $\frac{N}{9}$.

Vi have da til Bestemmelse af de mulige endelige Grupper:

$$\underline{N\Sigma\frac{n-1}{n} + N\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1} + N\Sigma\frac{n_2-1}{3n_2} + \frac{q}{9}N + 1 = N}$$

eller

$$\underline{\frac{1}{N} = 1 - \Sigma\frac{n-1}{n} - \Sigma\frac{n_1-1}{2n_1} - \Sigma\frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9},}$$

hvor ligesom før alle de Tal, der tilfredsstille denne Ligning, ikke svare til virkeligt existerende endelige Grupper; men hvor et meget stort Antal Værdier, der tilfredsstille denne Ligning, maa forkastes.

Antallet af Transformationer i de virkeligt existerende Grupper ses at maatte blive enten det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de i Gruppen indgaaende Transformationer, eller dette Tal multipliceret med 2, 3 eller 6.

Til Hjælp ved Dannelsen af Grupperne faar man, at enhver Transformation af 2den Orden, som hører til en endelig Gruppe, hvis Transformationer ere bragte paa samme Form som A (S. 69), maa have Elementerne svarende til a_1, b_2, c_3 (Diagonalelementerne) reelle.

Kaldes $a_1 + b_2 + c_3 = s$ Diagonalsummen for A og indeholder Gruppen en anden Transformation B, hvis Diagonalsum er d, og kaldes Diagonalsummen for B^pA s_p, faar man Relationen:

$$\underline{s_p - s_{p+3} = \bar{d}\, s_{p+1} - d\, s_{p+2}\,.}$$

Det kan endelig vises, at de endelige Grupper, som ikke ere cykliske, eller hvis Transformationer alle transformere samme rette Linie til sig selv, eller endelig indeholde Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter, men en fælles Potens, ere:

1) Grupper, hvis Transformationer alle transformere samme Keglesnit til sig selv.

Disse kunne betragtes som Transformationer af Grupperne for den rette Linie, og jeg benævner disse med samme Navne som de tilsvarende Grupper for den rette Linie.

2) En Gruppe indeholdende 36 Transformationer af 2den, 3die og 4de Orden. Denne er Undergruppe i den S. 69 nævnte Gruppe paa 72 Transformationer.

3) En Gruppe paa 360 Transformationer indeholdende Transformationer af 2^{den}, 3^{die}, 4^{de} og 5^{te} Orden.

I denne vil Ikosaedergruppen danne en Undergruppe.

4) En Gruppe paa 168 Transformationer af 2^{den}, 3^{die}, 4^{de} og 7^{de} Orden.

Endelig skal jeg omtale, at mine Undersøgelser i første Afsnit ogsaa kunne anvendes paa diskontinuerte Grupper, og at de netop oprindeligt have gaaet ud paa at omsætte Poincarés geometriske Betragtninger til rent algebraiske.

Mine Beviser for Gruppernes Endelighed ere af temmelig forskjellig Beskaffenhed, idet de ere forfattede til højst forskjellige Tider, og jeg ikke har villet omarbejde mine oprindelige Beviser, saa at de bleve ensartede med de senere tilføjede, der væsentlig ere af samme Art som W. Dyck's for lignende Sætninger; medens det, (saaledes for den 3^{die} Gruppe) vilde være meget vanskeligt at føre Beviset, saaledes som mine ældre Beviser ere førte, ved Multiplikation af selve Transformationsdeterminanterne.

I. Almindelige Bemærkninger.

Multiplikatorer.

1) Naar der her er Tale om Transformationer, menes hermed kun lineære Transformationer.

En saadan Transformation af en n-dobbelt-∞ Mangfoldighed er bestemt ved Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} \mu x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \ldots l_1 v, \\ \mu y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \ldots l_2 v, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu v' &= a_{n+1} x + b_{n+1} y + c_{n+1} z \ldots l_{n+1} v, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

hvor $x:y:z \ldots v$ ere det givne Punkts Koordinater, $x':y':z' \ldots v'$ det transformerede Punkts Koordinater, og hvor vi tilmed kunne sørge for, at Transformationsdeterminanten

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 & \ldots l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 & \ldots l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1} & \ldots l_{n+1} \end{vmatrix} = 1,$$

hvad der kan ske uden at formindske Transformationens Almindelighed, og hvor endda i samme Transformation alle Størrelserne a_1, b_1, c_1 ... o. s. v. kun ere bestemte paa nær en fælles Faktor, der er en vilkaarlig $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden.

Der gives nu altid Punkter, der transformeres til sig selv. Saadanne Punkter kaldes Dobbeltpunkter for Transformationen. For et saadant Punkt maa vi da have

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \ldots = \frac{v'}{v},$$

eller vi kunne for et saadant Punkt sætte

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z \ldots v' = v.$$

Skal dette finde Sted, bestemmes μ ved

$$\left.\begin{vmatrix} a_1-\mu, & b_1, & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2, & b_2-\mu, & c_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1} & \ldots & l_{n+1}-\mu \end{vmatrix} = 0, \right\} \quad (2)$$

idet man mellem de $(n+1)$ Transformationsligninger (1) eliminerer $x, y, z \ldots v$. Har man bestemt μ ved (2), bestemmes selve Koordinaterne til det til μ svarende Dobbeltpunkt ved n af Ligningerne (1).

2) Af (2) faar man $(n+1)$ Værdier af μ. Ere alle disse Værdier af μ forskjellige, faar man ogsaa netop $(n+1)$ Dobbeltpunkter, hvoraf ikke 2 kunne falde sammen.

Skulde der nemlig være flere end $(n+1)$ Dobbeltpunkter, maatte 1 af n vilkaarlige Ligninger mellem de $(n+1)$ Ligninger (1) være en Følge af de andre, for i det mindste én Værdi af μ. Men dette kræver, at alle Underdeterminanterne af n^{te} Orden i (2) skulle være 0. (2) maatte da have lige Rødder, hvad der strider mod det givne.

Paa den anden Side ses det, at der ikke til 2 Værdier af μ kunde svare det samme Dobbeltpunkt. Thi vare disse Værdier μ og μ', maatte man have ifølge (1), naar $x, y, z \ldots$ ere dette Dobbeltpunkts Koordinater,

$$(a_1-\mu)x + b_1 y \ldots l_1 v = 0,$$
$$(a_1-\mu')x + b_1 y \ldots l_1 v = 0,$$

og ved Subtraktion

$$(a-\mu')x = 0, \quad x = 0,$$

og paa samme Maade $y=0$, $z=0 \ldots v=0$, hvad der er en Umulighed, da Ligningerne (1) ikke bestemme selve Størrelserne $x, y, z \ldots v$, men kun deres Forhold.

3) Kaldes alle de Punkter, hvis Koordinater tilfredsstille Ligningen

$$Xx + Yy \ldots Vv = 0, \tag{3}$$

et Plan, idet $X, Y \ldots V$ ere givne Størrelser, er et Plan i Almindelighed bestemt ved at skulle gaa gjennem n Punkter. Det ses, at et Plan altid ved (1) igjen transformeres til et Plan. Betegnes Underdeterminanterne i D til $a_1, b_1, c_1 \ldots A_1, B_1, C_1 \ldots$ o. s. v., saa faar man af (1)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}x &= A_1 x' + A_2 y' \ldots A_{n+1} v', \\
\frac{1}{\mu}y &= B_1 x' + B_2 y' \ldots B_{n+1} v', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{\mu}v &= L_1 x' + L_2 y' \ldots L_{n+1} v'.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Kaldes $X:Y:Z: \ldots$ o. s. v. Plankoordinaterne til (3), bliver (3) ved (1) transformeret til et nyt Plan, hvis Plankoordinater ere bestemte ved

$$\left.\begin{array}{l}\mu' X' = A_1 X + B_1 Y \dots L_1 V, \\ \mu' Y' = A_2 X + B_2 Y \dots L_2 V, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu' V' = A_{n+1} X + B_{n+1} Y \dots L_{n+1} V.\end{array}\right\} \quad (5)$$

Altsaa blive Plankoordinaterne transformerede ved en Transformation, hvis Koefficienter ere Underdeterminanterne i D til dens Elementer.

Ved et Dobbeltplan forstaa vi et Plan, der transformeres til sig selv. For et saadant Plan kunne vi (analogt med hvad vi gjorde før) sætte $X' = X$, $Y' = Y \dots$ o. s. v. Vi se da, at naar dette skal finde Sted, bestemmes μ' ved Ligningen

$$\left.\begin{vmatrix} A_1 - \mu', & B_1, & C_1 & \dots & L_1 \\ A_2, & B_2 - \mu', & C_2 & \dots & L_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n+1}, & B_{n+1}, & C_{n+1} & \dots & L_{n+1} - \mu' \end{vmatrix} = 0, \right\} \quad (6)$$

og at denne Ligning, da $D = 1$, er den reciproke til (3), d. v. s. har de reciproke Rødder.

Ligesom før ses det da, at Transformationen har $(n+1)$ Dobbeltplaner, hvoraf ikke 2 kunne falde sammen, naar Rødderne i (2) alle ere forskjellige.

Det ses tillige, at, naar man kjender Koordinaterne til et Dobbeltpunkt for Transformationen (1), faas Plankoordinaterne til et Dobbeltplan, naar man ombytter Elementerne $a_1, b_1 \dots$ med deres Underdeterminanter i D og for μ sætter $\frac{1}{\mu}$.

Til hvert Dobbeltpunkt i Transformationen svarer saaledes et Dobbeltplan.

4) Vi skulle nu vise, at, naar man lader et Dobbeltpunkt og et Dobbeltplan svare til hinanden paa den i det foregaaende beskrevne Maade, vil ethvert Dobbeltplan gaa gjennem alle de øvrige Dobbeltpunkter, idet vi antage alle Rødderne i (2) forskjellige.

Kalde vi nemlig Dobbeltpunkternes Koordinater

$$\begin{array}{l} x_1, \; y_1, \; z_1 \; \dots \; v_1, \\ x_2, \; y_2, \; z_2 \; \dots \; v_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1}, \; y_{n+1}, \; z_{n+1} \; \dots \; v_{n+1}; \end{array}$$

de tilsvarende Værdier af μ

$$\mu_1, \; \mu_2 \; \dots \; \mu_{n+1}$$

og de tilsvarende Plankoordinater for Dobbeltplanerne

$$\begin{array}{llll} X_1, & Y_1, & Z_1 & \dots V_1, \\ X_2, & Y_2, & Z_2 & \dots V_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n+1}, & Y_{n+1}, & Z_{n+1} & \dots V_{n+1}, \end{array}$$

saa har man, at Dobbeltpunktet $x_k, y_k \dots v_k$ og det tilsvarende Dobbeltplan ere bestemte ved

$$\left.\begin{array}{l} \mu_k x_k = a_1 x_k + b_1 y_k + c_1 z_k \dots l_1 v_k \\ \mu_k y_k = a_2 x_k + b_2 y_k + c_2 z_k \dots l_2 v_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_k v_k = a_{n+1} x_k + b_{n+1} y_k + c_{n+1} z_k \dots l_{n+1} v_k \end{array}\right\} \quad (7)$$

og

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\mu_k} X_k = A_1 X_k + B_1 Y_k + C_1 Z_k \dots L_1 V_k, \\ \frac{1}{\mu_k} Y_k = A_2 X_k + B_2 Y_k + C_2 Z_k \dots L_2 V_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{\mu_k} V_k = A_{n+1} X_k + B_{n+1} Y_k + C_{n+1} Z_k \dots L_{n+1} V_k. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Nu ses det for det første, at man ikke kan have, at der mellem Koordinaterne til r vilkaarlige Dobbeltpunkter

$$\begin{array}{l} x_1, y_1, z_1 \dots v_1, \\ x_2, y_2, z_2 \dots v_2, \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_r, y_r, z_r \dots v_r, \end{array}$$

bestaar Ligninger af Formen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \dots \alpha_r x_r = 0, \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \dots \alpha_r y_r = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \dots \alpha_r v_r = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Multiplicerer man nemlig den øverste Ligning (9) med a_1, den næste med b_1, den næste med c_1 o. s. v., den sidste med l_1 og adderer, faar man

$$\alpha_1 \mu_1 x_1 + \alpha_2 \mu_2 x_2 \dots \alpha_r \mu_r x_r = 0.$$

Eliminerer man nu mellem denne Ligning og den øverste (9) x_r, faar man

$$\alpha_1(\mu_1 - \mu_r) x_1 + \alpha_2(\mu_2 - \mu_r) x_2 \dots \alpha_{r-1}(\mu_{r-1} - \mu_r) x_{r-1} = 0.$$

Paa lignende Maade faar man

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1(\mu_1-\mu_r)y_1+\alpha_2(\mu_2-\mu_r)y_2\ \ldots\ \alpha_{r-1}(\mu_{r-1}-\mu_r)y_{r-1}=0\,,\\
\alpha_1(\mu_1-\mu_r)z_1+\alpha_2(\mu_2-\mu_r)z_2\ \ldots\ \alpha_{r-1}(\mu_{r-1}-\mu_r)z_{r-1}=0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_1(\mu_1-\mu_r)v_1+\alpha_2(\mu_2-\mu_r)v_2\ \ldots\ \alpha_{r-1}(\mu_{r-1}-\mu_r)v_{r-1}=0\,,
\end{array}\right\}\quad(10)$$

hvor Ligningerne (10) ere af samme Form som (9), men kun indeholde Koordinaterne til $(r-1)$ Dobbeltpunkter.

Ligningerne (10) kunne da alle behandles paa samme Maade som (9) og ved at vedblive paa denne Maade vilde man tilsidst komme til, at alle Størrelserne

$$x_1,\ x_2\ \ldots\ x_{n+1}$$

maatte være 0, hvad der er urimeligt.

Heraf ses da, at Determinanten

$$\begin{vmatrix}
x_1, & y_1, & z_1 & \ldots & v_1\\
x_2, & y_2, & z_2 & \ldots & v_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_{n+1}, & y_{n+1}, & z_{n+1} & \ldots & v_{n+1}
\end{vmatrix}=\varDelta$$

ikke kan være 0, da der saa maatte bestaa Ligninger af Formen

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\ \ldots\ \alpha_{n+1}x_{n+1}=0\,,\\
\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\ \ldots\ \alpha_{n+1}y_{n+1}=0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n+1}v_1+\alpha_{n+1}v_2\ \ldots\ \alpha_{n+1}v_{n+1}=0\,,
\end{array}$$

og at heller ikke Underdeterminanterne til Elementerne i en Række af $\varDelta$ kunne være 0, da der saa maatte bestaa lignende Ligninger mellem Koordinaterne til n Dobbeltpunkter.

Det er da umiddelbart indlysende, at et Plan er fuldstændig bestemt ved at skulle gaa gjennem n af Dobbeltpunkterne, at et saadant Plan er et Dobbeltplan, da det transformerede Plan gaar gjennem de samme n Dobbeltpunkter, og at et saadant Plan ikke kan gaa gjennem det $(n+1)^{\text{te}}$ Dobbeltpunkt, da dette vilde kræve $\varDelta=0$. Det ses da, at man saaledes faar $(n+1)$ forskjellige Dobbeltplaner, eller alle Dobbeltplaner. Heraf fremgaar, at ethvert Dobbeltplan gaar gjennem n Dobbeltpunkter.

At det Dobbeltplan, som ikke gaar gjennem Punktet $x_{n+1},\ y_{n+1}\ \ldots\ v_{n+1}$, er det, som svarer til μ_{n+1}, lader sig ogsaa direkte paavise. Dette Plans Ligning er nemlig

$$\left.\begin{vmatrix} x, & y, & z & \dots & v \\ x_1, & y_1, & z_1 & \dots & v_1 \\ x_2, & y_2, & z_1 & \dots & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & y_n, & z_n & \dots & v_n \end{vmatrix} = 0. \qquad \right\} \quad (11)$$

Benævnes Underdeterminanterne til Elementerne i (11) med tilsvarende store Bogstaver, ere Plankoordinaterne for Planet (11) $X : Y : \dots V$; og om disse kan det vises, at de tilfredsstille de samme Ligninger, hvorved Plankoordinaterne til det omtalte Dobbeltplan ere bestemte. Man har nemlig

$$X = \begin{vmatrix} y_1, & z_1 & \dots & v_1 \\ y_2, & z_2 & \dots & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & z_n & \dots & v_n \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} X = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n X$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_1 y_1, & \mu_1 z_1 & \dots & \mu_1 v_1 \\ \mu_2 y_2, & \mu_2 z_2 & \dots & \mu_2 v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n y_n, & \mu_n z_n & \dots & \mu_n v_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 x_1 + b_2 y_1 \dots l_2 v_1, & a_3 x_1 + b_3 y_1 \dots l_3 v_1 & \dots & a_{n+1} x_1 + b_{n+1} y_1 \dots l_{n+1} v_1 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 \dots l_2 v_2, & a_3 x_2 + b_3 y_2 \dots l_3 v_2 & \dots & a_{n+1} x_2 + b_{n+1} y_2 \dots l_{n+1} v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 x_n + b_2 y_n \dots l_n v_n, & a_3 x_n + b_3 y_n \dots l_3 v_n & \dots & a_{n+1} x_n + b_{n+1} y_n \dots l_{n+1} v_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 & \dots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1} & \dots & l_{n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 & \dots & L_1 \\ x_1, & y_1, & z_1 & \dots & v_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 & \dots & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & y_n, & z_n & \dots & v_n \end{vmatrix},$$

hvor Rigtigheden af det sidste ses ved atter at udføre Multiplikationen; men da den første af disse Determinanter er 1, ses det umiddelbart, at man har

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} X = A_1 X + B_1 Y \dots L_1 V.$$

Paa samme Maade ses det, at man har

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} Y = A_2 X + B_2 Y + C_2 Z \ldots L_2 V$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{\mu_{n+1}} V = A_{n+1} X + B_{n+1} Y + C_{n+1} Z \ldots L_{n+1} V.$$

Sammenligner man nu disse Ligninger med (8), idet man for k sætter $n+1$, ses det, at disse Ligninger falde sammen, naar man for X sætter X_{n+1} for Y Y_{n+1} o. s. v. Herved er da bevist, at det omtalte Plan svarer til μ_{n+1}. Vi se altsaa, at ethvert Dobbeltplan gaar gjennem alle Dobbeltpunkterne med Undtagelse af dets tilsvarende Dobbeltpunkt.

Paa samme Maade kan naturligvis vises, at ethvert Dobbeltpunkt ligger paa alle Dobbeltplanerne med Undtagelse af dets tilsvarende Dobbeltplan.

5) Lad os stadigt antage, at alle Rødderne i (2) ere forskjellige for Transformationen (1), og at Dobbeltplanernes Ligninger ere

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv X_1 x + Y_1 y \ldots V_1 v = 0, \\ P_2 &\equiv X_2 x + Y_2 y \ldots V_2 v = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n+1} &\equiv X_{n+1} x + Y_{n+1} y \ldots V_{n+1} v = 0, \end{aligned}$$

saa maa man altid kunne skrive Transformationsligningerne under Formen

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 P'_1 &= \alpha P_1, \\ \mu_1 P'_2 &= \beta P_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mu_1 P'_{n+1} &= \lambda P_{n+1}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

hvor α, β, $\gamma \ldots \lambda$ ere Konstanter, og hvor P'_1, $P'_2 \ldots P'_{n+1}$ betyde Former, der faas af P_1, $P_2 \ldots P_{n+1}$ ved for x, y, $z \ldots$ at sætte x', y', $z' \ldots$ Om Konstanterne α, β, $\gamma \ldots \lambda$ kunne vi antage, at deres Produkt er 1. Disse Konstanter kaldes Transformationens Multiplikatorer. Det er klart, at man altid kan skrive Transformationen (1) under Formen (12). Thi for det første bestemmer (12) en lineær Transformation af samme Form som (1), da vi ved at løse Ligningerne m. H. t. $\mu_1 x'$, $\mu_1 y'$, $\mu_1 z' \ldots \mu_1 v'$ faa disse udtrykte ved lineære Funktioner af x, y, $z \ldots v$ med konstante Koefficienter.

Dernæst ses det, at hvis vi i

$$\mu P'_1 = \mu (X_1 x' + Y_1 y' \ldots + V_1 v')$$

for $\mu x'$, $\mu y' \ldots \mu v'$ sætte Udtrykkene i (1), faa vi

$$\mu P_1' = P,$$

hvor P er en lineær Funktion af $x, y, z \ldots v$. Lad os antage

$$P = ax + by \ldots lv,$$

saa kunne vi sætte, hvis X_1 ikke er 0, (og ellers kan en anden af Koefficienterne i P benyttes paa samme Maade),

$$P = \frac{a}{X_1} P_1 + Q,$$

hvor Q er en Størrelse, der ikke indeholder x. Man har da

$$\mu P_1' = \frac{a}{X_1} P_1 + Q,$$

og, da Q skal være 0 for alle de Værdier af $x, y, z \ldots v$, der gjøre P_1 til 0 og dens Koefficienter ikke kunne være proportionale med P_1's Koefficienter, da den mangler Leddet indeholdende x, maa alle dens Koefficienter være 0.

Vi have saaledes fundet

$$\begin{aligned} \mu P_1' &= k_1 P_1, \\ \mu P_2' &= k_2 P_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mu P_{n+1}' &= k_{n+1} P_{n+1}, \end{aligned}$$

hvor $k_1, k_2 \ldots k_n$ ere Konstanter. Satte vi her $\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt[n+1]{k_1, k_2 \ldots k_{n+1}}}$, faa vi Ligningerne paa Formen (12).

Det ses da, at Multiplikatorerne kun ere bestemte paa en Faktor nær, der er en vilkaarlig $(n+1)$te Rod af Enheden.

6) Da Multiplikatorerne ere af stor Betydning for de endelige og diskontinuerte Gruppers Theori, skulle vi se at finde disse Størrelser, naar Transformationen er givet ved Ligningerne (1). (12) skal være ekvivalent med (1). Vi maa derfor komme tilbage til Ligningerne (1), naar vi løse Ligningerue (12) m. H. t. $\mu_1 x', \mu_1 y', \mu_1 z'$ o. s. v.

Men herved faar man Udtryk af Formen

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 x' &= Q_1 \\ \mu_1 y' &= Q_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \mu_1 v' &= Q_{n+1}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

hvor $Q_1, Q_2 \ldots Q_{n+1}$ ere lineære Funktioner af $x, y, z \ldots$ Skulle altsaa (13) og (1) være identiske, maa μ_1 og μ kun være forskjellige ved en konstant Faktor, eller vi have

$$\mu = k\mu_1, \quad (14)$$

hvor k er en Konstant. Nu kunne vi sætte $P_1 = P_2 \ldots = P_n = 0$, da er det Punkt, som er bestemt herved, et Dobbeltpunkt, hvis tilsvarende Dobbeltplan er $P_{n+1} = 0$. Vi kunne nu for dette Punkt sætte

$$x' = x, \; y' = y \; \ldots \; v' = v.$$

Den hertil svarende Værdi af μ er en af Rødderne i (2), medens Værdien af μ_1 er λ.

Vi have da, at $k\lambda$ er en Rod i Ligningen (2). Hvad der gjælder om λ, gjælder selvfølgelig ogsaa om alle de andre Multiplikatorer. Det gjælder da kun om at bestemme Værdien af k. Det Led, der ikke indeholder μ i (2), er imidlertid ± 1, medens Koefficienten til μ^{n+1} er 1, vi have derfor i alle Tilfælde

$$\alpha . \beta . \gamma \; \ldots \; \lambda k^{n+1} = 1 ,$$

og da

$$\alpha\beta . \gamma \; \ldots \; \lambda = 1 ,$$

$$k^{n+1} = 1 ,$$

saa at k er en $(n+1)^{te}$ Rod af Enheden. Multiplikatorerne ere imidlertid kun bestemte paa en Faktor nær, der er en $(n+1)^{te}$ Rod af Enheden. Vi kunne derfor vælge Multiplikatorerne saaledes, at $k = 1$.

Er en Transformation givet ved Ligningerne

$$\left.\begin{array}{l} \mu x' = a_1 x + b_1 y \; \ldots \; l_1 v , \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \; \ldots \; l_2 v , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y \; \ldots \; l_{n+1} v , \end{array}\right\} \quad (15)$$

hvor Transformationsdeterminanten er 1, saa ere Transformationens Multiplikatorer Rødder i Ligningen

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu, & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 , & b_2 - \mu & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1} , & b_{n+1} & \ldots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

forudsat, at Rødderne i denne Ligning alle ere forskjellige.

7) Naar en Transformation ved at ophøjes til m^{te} Potens bliver identisk, siges den at være af m^{te} Orden, forudsat, at den ikke bliver identisk ved at ophøjes til en lavere Potens.

Kan Transformationen skrives under Formen (12), er Betingelsen for, at den er af m^{te} Orden, at vi have

$$\alpha^m = \beta^m \; \ldots \; = \lambda^m ,$$

og at ikke lignende Ligninger finde Sted, naar vi for m sætte p, $p < m$.

Da $$\alpha^m \beta^m \ldots \lambda^m = 1,$$
er $$\alpha^m = \beta^m \ldots = \lambda^m = \theta,$$
hvor θ er en $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden. Er m og $n+1$ primiske, maa man da have

$$\alpha = \sqrt[m]{1} \,.\, \sqrt[n+1]{1},$$

og da α kun er bestemt paa en $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden nær, kan man da lade α være en m^{te} Rod af Enheden, i hvilket Tilfælde

$$\alpha^m = \beta^m \ldots \lambda^m = 1.$$

Hvis altsaa m og $(n+1)$ ere primiske, kan man sige, at Transformationen er af m^{te} Orden, hvis alle Multiplikatorerne ere primiske Rødder af Enheden, hvor det mindste fælles Multiplum for Rodexponenterne er m.

Er m og $(n+1)$ ikke primiske, og man har

$$m = p \,.\, q_1^{r} q_2^{r_1} \ldots$$
$$n+1 = p_1 q_1^{s} q_2^{s_1} \ldots,$$

hvor $p, p_1, q_1, q_2 \ldots$ o. s. v. ere indbyrdes primiske Tal, saa er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Transformationen er af m^{te} Orden, som før sagt, at m er det laveste Tal for hvilket

$$\alpha^m = \beta^m \ldots \lambda^m = \theta,$$

hvor θ er en $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden. Sætte vi

$$\theta = \varphi \,.\, \theta_1 \,.\, \theta_2 \ldots,$$

hvor φ er en p_1^{te} Rod, θ_1 en $q_1^{s\,\text{te}}$ Rod, θ_2 en $q_2^{s_1\text{te}}$ Rod o. s. v., have vi

$$\alpha = \varphi \,.\, \psi \,.\, \theta_1^{\frac{1}{q_1^{r}}} \theta_2^{\frac{1}{q_2^{r}}} \ldots,$$

hvor ψ er en p^{de} Rod af Enheden.

Vi kunne her gjerne antage $\varphi = 1$, da vi vilkaarligt kunne multiplicere alle Multiplikatorerne med en $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden.

Da man skal have

$$\beta = \sqrt[m]{\theta},$$

hvor β er en ny m^{te} Rod af θ, og denne faas af den foregaaende, ved at multiplicere den med en m^{te} Rod af Enheden (idet alle m^{te} Rødder af en Størrelse faas ved at multiplicere én m^{te} Rod med de forskjellige Værdier for en m^{te} Rod af Enheden), ses det, at Multiplikatorerne i dette Tilfælde have Formen

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \left(\theta_1^{\frac{1}{q_1^r}} \theta_2^{\frac{1}{q_2^{r_1}}} \cdots \right) \alpha_1 &&= \chi \alpha_1 \\
\beta &= &&= \chi \beta_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda &= &&= \chi \lambda_1 ,
\end{aligned}
$$

hvor χ er en $q_1^{r+s} q_2^{r_1+s_1}$te ... Rod af Enheden; α_1, β_1 ... ere $m$te Rødder af Enheden.

8) Vi have hidtil behandlet Transformationerne under den Forudsætning, at alle Rødderne i (2) vare ulige store. Antages Rødderne at være lige store, vil, hvad der er sagt i det foregaaende, kun til Dels gjælde.

Det ses saaledes, at hvis (2) kun har p ulige store Rødder, $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p$ $(p < n+1)$, vil Transformationen (1) have mindst p forskjellige Dobbeltpunkter, og ligeledes p forskjellige Dobbeltplaner, svarende til de forskjellige Værdier af μ (Multiplikatorer), samt at der ikke mellem Koordinaterne til k saadanne Dobbeltpunkter (eller Dobbeltplaner) mellem de p, svarende til forskjellige Værdier af μ, kan finde Ligninger Sted af Formen (9).

Beviset herfor føres, ligesom naar alle Rødderne i (2) ere forskjellige. Derimod kan der godt til samme Værdi af μ svare flere Dobbeltpunkter, saafremt μ er en lige Rod i (2) (smlgn. 2)), og det er ikke sagt, at man altid kan bringe Transformationerne paa Formen (12).

Vi skulle nu, naar (2) har lige Rødder, særligt undersøge, hvornaar Transformationen ved Gjentagelse kan blive identisk.

Vi kunne tænke os, at venstre Side af ét af Dobbeltplanernes Ligninger er

$$P_1 \equiv X_1 x + Y_1 y \ldots V_1 v , \tag{16}$$

saa faar man, idet P_1' betegner den Størrelse, hvortil P_1 transformeres, naar $x, y, z \ldots$ erstattes ved $x_1', y_1', z_1' \ldots$

$$\mu P_1' = \alpha P_1 , \tag{17}$$

hvad der ses paa samme Maade som i 5).

Vi kunne nu erstatte en af Transformationsligningerne (1) ved (17), og overalt for x sætte dets Værdi funden af (16), saa faa vi

$$
\left.
\begin{aligned}
\mu P_1' &= \alpha P_1 \\
\mu y' &= a_2' P_1 + b_2' y \ldots l_2' v \\
\mu z' &= a_3' P_1 + b_3' y \ldots l_3' v \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu v' &= a_{n+1}' P_1 + b_{n+1}' y \ldots l_{n+1}' v .
\end{aligned}
\right\} \tag{18}
$$

Betragte vi nu Systemet af Transformationsligninger

$$\left.\begin{array}{l}\mu y' = b'_2 y \quad \dots \; l'_2 v \\ \mu z' = b'_3 y \quad \dots \; l'_3 v \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu v' = b'_{n+1} y \; \dots \; l'_{n+1} v\end{array}\right\} \quad (19)$$

og antage, at venstre Side af et Dobbeltplan for denne Transformation er Ligningen for

$$P_2 \equiv Y_2 y \dots V_2 v, \qquad (20)$$

samt at

$$\mu P'_2 = \beta P_2,$$

hvor P'_2 er fremkommet ved at transformere P_2 ved (19), ligesom før P_1 ved (1), saa er det let at se, at man i Systemet (18) vil have

$$\mu P'_2 = a''_2 P_1 + \beta P_2.$$

Lade vi nu denne Ligning træde i Stedet for den 2den Ligning (18) og indsætte overalt i (18) y fundet af (20), vil (18) faa Formen

$$\left.\begin{array}{l}\mu P_1 = \alpha P_1 \\ \mu P_2 = a''_2 P_1 \quad + \beta P_2 \\ \mu z' = a''_3 P_1 \quad + b''_3 P_2 \quad \dots \; l''_3 v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu v' = a''_{n+1} P_1 + b''_{n+1} P_2 \dots l''_{n+1} v.\end{array}\right\} \quad (21)$$

Fortsætte vi paa samme Maade se vi tilsidst, at vi, hvorledes Rødderne i (2) end ere beskafne, altid kunne bringe (1) paa Formen

$$\left.A \equiv \left\{\begin{array}{l}\mu P'_1 \;\; = \alpha P_1 \\ \mu P'_2 \;\; = a_2 P_1 \quad + \beta P_2 \\ \mu P'_3 \;\; = a_3 P_1 \quad + \beta_3 P_2 + \gamma P_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu P'_{n+1} = a_{n+1} P_1 + \beta_{n+1} P_2 \dots \lambda P_{n+1}.\end{array}\right.\right\} \quad (22)$$

Da man, naar

$$x' = x, \quad y' = y, \quad \dots \quad v' = v,$$

ogsaa maa have

$$P_1 = P'_1, \quad P_2 = P'_2 \dots P_{n+1} = P'_{n+1},$$

og de hertil svarende Værdier af μ ere bestemte ved

$$\left.\begin{vmatrix} a-\mu & 0 & 0 & \dots 0 \\ a_2 & \beta-\mu & 0 & \dots 0 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma-\mu & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & \dots \lambda-\mu \end{vmatrix} = \right\} \quad (23)$$

$(a-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu) \dots (\lambda-\mu) = 0$, ser man, at $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$ ere Rødderne i (2).

Det ses umiddelbart, at $P_1 = 0$ er det Dobbeltplan, der svarer til α, idet den 1ste Ligning (22) netop angiver, at ved (22) transformeres Plankoordinaterne for $P_1 = 0$ saaledes, at de oprindelige og de transformerede Plankoordinater blive identiske naar $\mu = \alpha$ (smlgn. 3)).

Paa lignende Maade ses, at $P_2 = o$ er et i Systemet (19) til β svarende Dobbeltplan, idet her anvendes lignende let forstaaelige Betegnelser for de forskjellige Systemer, uagtet Transformationsdeterminanten for saadanne Systemer som (19) ikke behøver at være 1.

Det ses ogsaa, at de Værdier af μ, der gjøre $y' = y$, $z' = z \ldots v' = v$ i Systemet (19), ere de øvrige Rødder i (2) med Undtagelse af α.

Vi kunne nu betragte Transformationen (1), for det Tilfælde, at (2) har lige Rødder.

Lad os antage, at α er en lige Rod og 2 Gange Rod i (2), saa kunne vi sætte $\beta = \alpha$. De 2 første Ligninger af (22) blive da

$$\begin{aligned} \mu P'_1 &= \alpha P_1 \\ \mu P'_2 &= \alpha_2 P_1 + \alpha P_2 \,. \end{aligned}$$

Betegne vi nu i Transformationen (22) de forskjellige Potenser (Gjentagelser af den) ved A^2, A^3 o. s. v., faa vi

$$A^2 = \begin{cases} \mu P'_1 = \alpha^2 P_1 \\ \mu P'_2 = 2\alpha\alpha_2 P_1 + \alpha^2 P_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$A^3 = \begin{cases} \mu P'_2 = \alpha^3 P_1 \\ \mu P'_2 = 3\alpha^2\alpha_2 P_1 + \alpha^3 P_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^p = \begin{cases} \mu P'_2 = \alpha^p P_1 \\ \mu P'_2 = p\,\alpha^{p-1}\alpha_2 P_1 + \alpha^p P_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Da her $p\alpha^{p-1}\alpha_2$ ikke kan blive 0, med mindre $\alpha_2 = 0$, ses det, at ingen Potens af A kan blive identisk, med mindre $\alpha_2 = 0$ og α er en Rod af Enheden.

Tillige ses dette at være tilstrækkelige Betingelser for, at en Potens af A bliver en identisk Transformation, hvis de øvrige Rødder i (2) ere indbyrdes forskjellige og Rødder af Enheden.

Betragte vi nemlig da Transformationen (19) og kalde Dobbeltplanerne i denne

$$P_2 \,,\; P_3 \ldots P_{n+1} \,,$$

kan denne skrives

$$\begin{aligned} \mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ \mu P'_3 &= \beta P_3 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \mu P'_{n+1} &= \lambda P_{n+1} \end{aligned}$$

og den oprindelige Transformation

$$\begin{aligned} \mu P'_1 &= \alpha P_1 \\ \mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ \mu P'_3 &= \alpha_3 P_1 + \gamma P_3 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \mu P'_{n+1} &= \alpha_{n+1} P_1 + \lambda P_{n+1} \end{aligned}$$

Multiplicere vi nu den 1ste Ligning med p og lægger den til den 3die, have vi

$$\mu(P'_3 + p P'_1) = (\alpha_3 + p\alpha) P_1 + \gamma P_3 = \gamma\left(P_3 + \frac{\alpha_3 + p\alpha}{\gamma} P_1\right).$$

Bestemme vi nu p ved

$$p = \frac{\alpha_3 + p\alpha}{\gamma}$$

$$p = \frac{\alpha_3}{\gamma - \alpha},$$

og kalde vi $P_3 + pP_1 = Q_3$, faar denne Ligning Formen

$$\mu Q'_3 = \gamma Q_3,$$

som kan erstatte den 3die Ligning. Paa lignende Maade kunne de øvrige Ligninger behandles. Vi have da Transformationerne (1) paa Formen

$$\begin{aligned} \mu P'_1 &= \alpha P_1 \\ \mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ \mu Q'_3 &= \gamma Q_3 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \mu Q'_{n+1} &= \lambda Q_{n+1}, \end{aligned}$$

hvorved Sætningen bevises.

Paa lignende Maade gaas frem, hvis α er en p-dobbelt Rod, idet man saa ser, at man maa have

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_4 = \beta_4 = \ldots \alpha_p = \beta_p \ldots \delta_p = 0,$$

samt at dette er den tilstrækkelige Betingelse, hvis de øvrige Rødder i (2) ere forskjellige, naturligvis i Forbindelse med, at Rødderne i (2) ere Rødder af Enheden.

Findes der lige Rødder blandt de øvrige Rødder, kommer der endnu andre Betingelser af lignende Art til. Vi kunne nu imidlertid udtrykke de fundne Betingelser paa en anden Maade, der gjør det let at vise, hvad der i alle Tilfælde er de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser.

Lad os kalde Rødderne i (2) Transformationens Multiplikationer. Ere p af disse lige store, kan man skrive p af Transformationsligningerne

$$\begin{aligned} \mu P'_1 &= \alpha P_1 \\ \mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \mu P'_p &= \alpha P_p \end{aligned}$$

og faa da ved at multiplicere disse med vilkaarlige Konstanter og addere

$$\mu(a P'_1 + b P'_2 \ldots e P'_1) = \alpha(a P_1 + b P_2 \ldots e P_p),$$

som viser, at

$$a P_1 + b P_2 \ldots e P_2 = 0$$

ogsaa er et Dobbeltplan, eller at naar α er en p-dobbelt Rod i (2), maa der til denne Multiplikator svare en $(p-1)$-dobbelt-∞ Række Dobbeltplaner.

Vi se da, at vi have som nødvendige Betingelser for at en Potens af en Transformation bliver identisk, at alle Multiplikatorerne ere Rødder af Enheden, samt, at naar en Multiplikator er p-dobbelt Rod i (2), at der saa til denne svarer en $(p-1)$-dobbelt-∞ lineær Række Dobbeltplaner.

Det skal nu vises, at disse Betingelser ogsaa ere tilstrækkelige.

Kaldes Multiplikatorerne α, β, γ ... λ, blandt hvilke flere gjerne kunne være lige store, saa kunne vi lade svare til hver af dem Planer saaledes beskafne, at der ikke mellem venstre Side af Ligningerne for saadanne Planer, der svare til samme Multiplikator, bestaa lineære Relationer med konstante Koefficienter. Efter hvad der er sagt i 8), kan der heller ikke bestaa saadanne Relationer mellem venstre Side af Ligningerne for saadanne Planer, der alle svare til forskjellige Multiplikatorer.

Vi kunne nu endelig paa samme Maade som i 8) vise, at der heller ikke kan bestaa saadanne Relationer mellem venstre Side af Ligningerne for saadanne Planer, af hvilke nogle svare til samme andre til forskjellige Multiplikatorer, forudsat, saaledes som her, at der ikke bestaar lineære Relationer mellem venstre Side af Ligningerne for Planer svarende til samme Multiplikator.

Vi kunne nemlig antage, at Ligningerne for disse Planer, i Antal k ere,

$$\begin{aligned} X_1 x + Y_1 y \ldots V_1 v &= 0, \\ X_2 x + Y_2 y \ldots V_2 v &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ X_k x + Y_k y \ldots V_k v &= 0. \end{aligned}$$

Vi ville nu vise, at vi da ikke kunne have, at følgende Relationer finde Sted

$$\begin{aligned} \alpha X_1 + \beta X_2 \ldots \varepsilon X_k &= 0 \\ \alpha Y_1 + \beta Y_2 \ldots \varepsilon Y_k &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \alpha V_1 + \beta V_2 \ldots \varepsilon V_k &= 0. \end{aligned}$$

Vi kunne antage, at der ikke mellem færre af disse Størrelser kunne bestaa saadanne Ligninger.

Multipliceres nu den første Ligning med A_1, den anden med $B_1 \ldots$, den sidste med L_1 og adderes, faas

$$\alpha\mu_1 X_1 + \beta\mu_2 X_2 \ldots \varepsilon\mu_k X_k = 0.$$

Efter Forudsætningen kunne alle disse Værdier af Multiplikatorerne, $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k$ ikke være lige store. Antage vi nu μ_k forskjellig fra μ_1, kunne vi mellem den sidst fundne Ligning og den første givne Ligning eliminere X_k.

Vi faa da en lineær Ligning mellem X_1 og en Del af de øvrige Størrelser af X, men ikke indeholdende X_k. Det ses at denne Ligning ogsaa er rigtig, naar man ombytter X med Y, Z, ... Men dette strider mod Forudsætningen. Da vi nu, naar α er q-dobbelt Rod i (2), til α kunne lade svare q Dobbeltplaner, hvis Ligninger ere lineært uafhængige af hinanden, ses herved at være vist, at der existerer $(n+1)$ Dobbeltplaner, hvis Ligninger ere lineært uafhængige af hinanden.

Hermed er da bevist, at de gjorte Forudsætninger ere tilstrækkelige. Da man, naar venstre Side af Ligningen for et Dobbeltplan, svarende til Multiplikatoren α er P_1, har $\mu P'_1 = \alpha P_1$, ses dette Dobbeltplan at maatte gaa gjennem alle de Dobbelpunkter, der svare til de andre Multiplikatorer; thi svarer et Dobbeltpunkt til Multiplikatoren β og indsættes dets Koordinater i Ligningen $\mu P'_1 = \alpha P_1$, har man, da denne Ligning i dette Tilfælde skal være tilfredsstillet ved $x = x'$, $y = y' \ldots v = v'$, $\mu = \beta$,

$$\beta P_1 = \alpha P_1,$$

som kun er mulig naar $P_1 = 0$.

Omvendt ses det, at ethvert Plan, der gaar gjennem de Dobbeltpunkter, der svare til alle de øvrige Multiplikatorer undtagen α, er et Dobbeltplan, der svarer til α.

Thi, analogt med, hvad der er vist om Dobbeltplanerne, maa der mellem de Dobbeltpunkter, der ikke svare til α, kunne udvælges $n+1-q$, hvis Koordinater ere lineært uafhængige af hinanden, naar α er en q-dobbelt Rod i (2), og igjennem disse $n+1-q$ Punkter kan der lægges en $q-1$-dobbelt-∞ Række Planer, som da maa falde sammen med de omtalte Planer, thi disse danne ogsaa en $q-1$-dobbelt-∞ Række.

Analoge Sætninger med dem, der her ere udviklede om Dobbeltplanerne, gjælde naturligvis om Dobbeltpunkterne.

Saaledes vil der til enhver Multiplikator, der er q-dobbelt Rod i (2), svare en (q — 1)-dobbelt-∞ Række Dobbeltpunkter.

Igjennem ethvert Dobbeltpunkt, der svarer til en Multiplikator α, ville alle de Dobbeltplaner gaa, der svare til alle de andre Multiplikatorer, og omvendt ville alle de Punkter, som ere fælles for alle de Planer, der svare til de andre Multiplikatorer, med Undtagelse af α, være Dobbeltpunkter, der svare til α.

9) Indføres nye Koordinater ved at sætte

$$\begin{array}{l} px = \alpha_1 x_1 \;\; + \beta_1 y_1 \;\; \ldots \lambda_1 v_1 \\ py = \alpha_2 x_1 \;\; + \beta_2 y_1 \;\; \ldots \lambda_2 v_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ pv = \alpha_{n+1} x_1 + \beta_{n+1} y_1 \ldots \lambda_{n+1} v_1 , \end{array}$$

ville Multiplikatorerne blive uforandrede, saaledes som Ligningerne (12) vise. Vi kunne derfor sige, at Multiplikatorerne ere absolute Invarianter for Transformationen.

Vi kalde Planerne $x = 0$, $y = 0$ ... o. s. v. Koordinatplanerne. I det nye System ere altsaa $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, ... $v_1 = 0$ Koordinatplaner.

Det ses, at hvis Transformationen, udtrykt i det nye System, bringes paa Formen (1) ved at løse Ligningerne (1) eller (12) m. H. t. $\mu x'_1$, $\mu y'_1$ ... $\mu v'_1$ vil Determinanten for Transformationen vedvarende være 1.

II. Transformationernes Sammensætning.

10) Vi ville nu søge at finde saadanne Grupper, hvor alle Multiplikatorerne i Transformationer henhørende til Gruppen have Modulus 1, og hvor Transformationerne ere saaledes beskafne, at de kunne bringes paa Formen (12).

Lad os antage, at 2 Transformationer henhørende til Gruppen, kaldes A og B. Vi ville særligt undersøge Grupperne, under den Betingelse, at der forekommer i det mindste en Transformation heri, hvis Multiplikatorer alle ere forskjellige. Vi kunne da senere ved de specielle Undersøgelser over Grupperne undersøge, hvorledes det gaar, naar dette ikke er Tilfældet (eller om der overhovedet gives saadanne Grupper).

Vi antage nu om A, at alle dens Multiplikatorer ere forskjellige, og vi vælge til Koordinatplaner de $n+1$ Dobbeltplaner for A.

Vi kunne da sætte

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \mu v' = \lambda v \end{cases}$$

og

$$B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \ \ldots\ l_1 v \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \ \ldots\ l_2 v \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y \ldots l_{n+1} v, \end{cases}$$

hvor B's Multiplikatorer ere bestemte ved

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 - \mu & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \ldots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

en Ligning der kan skrives

$$\left. \begin{array}{l} \mu^{n+1} - (a_1 + b_2 \ldots l_{n+1}) \mu^n + ((a_1 b_2) + (a_1 c_3) \ldots) \mu^{n-1} \ldots \\ \qquad \mp ((A_1 B_2) + (A_1 C_3) \ldots) \mu \pm 1 = 0, \end{array} \right\} \qquad (24)$$

idet vi ved $(a_1 b_2)$ $(a_1 c_3) \ldots$ o. s. v. betegne $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ... o. s. v., og betegne Underdeterminanterne i Transformationsdeterminanten ved tilsvarende store Bogstaver til Elementerne, medens øverste eller underste Fortegn svare til $n+1$ lige eller ulige.

Da Ligningen (24) skal vedblive at gjælde, naar μ ombyttes med $\frac{1}{\mu}$ (idet $\frac{1}{\mu}$ er den konjugerede Størrelse til μ, da dens Modulus er 1), og samtidig alle Størrelserne a_1, $b_1 \ldots$ ombyttes med deres konjugerede Størrelser, maa man have

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_2 \ldots \quad l_{n+1} &= \overline{A_1} + \overline{B_2} \ldots \overline{L_{n+1}} \\ (a_1 b_2) + (a_1 c_3) \ldots &= (\overline{A_1 B_2}) + (\overline{A_1 C_3}) + \ldots \\ (a_1 b_2 c_3) + (a_1 b_2 d_4) \ldots &= (\overline{A_1 B_2 C_3}) + (\overline{A_1 B_2 D_4}) + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

idet altid den konjugerede Størrelse til en given Størrelse betegnes ved at sætte en Streg over den, ligesom i det følgende Modulus af en Størrelse betegnes ved at sætte den mellem to Streger. Altsaa $|b|$ lig Modulus til b.

Ligningen (25) maa nu ogsaa gjælde for $A^m B$, idet vi forudsætte, at enhver Transformation i Gruppen har Multiplikatorer, hvis Modulus er 1.

Man maa da have

$$\left.\begin{aligned} \alpha^m a_1 + \beta^m b_2 \ldots \lambda^m l_{n+1} &= \alpha^m \overline{A_1} + \beta^m \overline{B_2} \ldots \lambda^m \overline{L_{n+1}} \\ \Sigma \alpha^m \beta^m (a_1 b_2) &= \Sigma \alpha^m \beta^m (\overline{A_1 B_2}) \\ \Sigma \alpha^m \beta^m \gamma^m (a_1 b_2 c_3) &= \Sigma \alpha^m \beta^m \gamma^m (\overline{A_1 B_2 C_3}). \end{aligned}\right\} \quad (26)\,^{*)}$$

Er nu A en Transformation af Ordenen p, $p \geq n+1$, hvad den altid maa være, naar alle Multiplikatorerne ere forskjellige, kræver dette at

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \overline{A_1} \\ b_2 &= \overline{B_2} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ l_{n+1} &= \overline{L^{n+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Det ses ogsaa, at hvis p er tilstrækkelig høj og alle Størrelserne $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ... forskjellige, vil af (26) følge, at

$$(a_1 b_2) = (\overline{A_1 B_2}), \text{ o. s. v.}$$

11) Lad os nu antage, at B og C ere to vilkaarlige Transformationer henhørende til Gruppen. Lad os antage, at C har Ligningerne

$$C = \left\{\begin{aligned} \mu x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y \ldots \lambda_1 v \\ \mu y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y \ldots \lambda_2 v \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu v' &= \alpha_{n+1} x + \beta_{n+1} y \ldots \lambda_{n+1} v, \end{aligned}\right.$$

*) Naar et Punkt transformeres ved Transformationen $A^m B$, forstaas herved, at det først transformeres ved B, derpaa ved A^m.

saa kunne vi danne Transformationen CA^mB. Det første Element i Transformationsdeterminanten til CA^mB er da

$$\alpha^m \alpha_1 a_1 + \beta^m \beta_1 a_2 \ldots \lambda^m \lambda_1 a_{n+1}.$$

Efter det foregaaende skal denne Størrelse være konjugeret med sin Underdeterminant i Transformationsdeterminanten for CA^mB; men denne Underdeterminant er det første Element i Transformationsdeterminanten for den omvendte Transformation $B^{-1}A^{-m}C^{-1}$.

Dette Element er

$$\alpha^{-m} \mathrm{A}_1 A_1 + \beta^{-m} \mathrm{B}_1 A_2 \ldots \lambda^{-m} \Lambda_1 A_{n+1},$$

og man har altsaa

$$\alpha^m \alpha_1 a_1 + \beta^m \beta_1 a_2 \ldots \lambda^m \lambda_1 a_{n+1} = \alpha^m \overline{\mathrm{A}_1 A_1} + \beta^m \overline{\mathrm{B}_1 A_2} \ldots \lambda^m \overline{\Lambda_1 A_{n+1}},$$

og ligesom før, da A er en Transformation af $(n+1)$te eller højere Orden,

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha_1 a_1 & = & \overline{\mathrm{A}_1 A_1} \\ \beta_1 a_2 & = & \overline{\mathrm{B}_1 A_2} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ \lambda_1 a_{n+1} & = & \overline{\Lambda_1 A_{n+1}}. \end{array}\right\} \quad (28)$$

ad nu C være identisk med B, saa giver (28)

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1^2 & = & \overline{A_1^2} \\ b_1 a_2 & = & \overline{B_1 A_2} \\ c_1 a_3 & = & \overline{C_1 A_3} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ l_1 a_{n+1} & = & \overline{L_1 A_{n+1}}. \end{array}\right\} \quad (29)$$

Disse Ligninger og de analoge, som faas ved at udtrykke, at de øvrige Elementer i Diagonalrækken i Transformationsdeterminanten for CA^mB skulle være konjugerede med deres Underdeterminanter, udtrykke, at Produktet af 2 Elementer i Transformationsdeterminanten for B, der ligge symmetrisk m. H. t. Diagonalrækken, ere konjugerede med Produktet af deres Underdeterminanter.

Lade vi C være den omvendte Transformation af B, have vi

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 A_1 & = & \overline{a_1 A_1} \\ a_2 A_2 & = & \overline{a_2 A_2} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n+1} A_{n+1} & = & \overline{a_{n+1} A_{n+1}}. \end{array}\right\} \quad (30)$$

Disse Ligninger og de dermed analoge, som faas paa lignende Maade, udtrykke: At Produktet af et Element og dets Underdeterminant i Transformationsdeterminanten for B, en vilkaarlig Transformation i Gruppen, er reel.

Thi dette finder Sted, naar en Størrelse er sin egen konjugerede Størrelse (og ikke er ∞).

12) Haves en Transformationsgruppe, hvis enkelte Transformationer betegnes

$$A, \; B, \; C \ldots \text{ o. s. v.},$$

faas en hermed ligedannet Gruppe, idet vi danne alle Transformationerne

$$FAF^{-1}, \; FBF^{-1}, \; FCF^{-1} \ldots \text{ o. s. v.},$$

idet F er en vilkaarlig Transformation, og F^{-1} betegner den omvendte Transformation af F.

De 2 Grupper vi saaledes faa, svare til hinanden saaledes, at der til hver Transformation i den ene svarer en Transformation i den anden, og saaledes, at der til en Transformation, sammensat af 2 Transformationer i den ene Gruppe svarer en Transformation sammensat af de 2 tilsvarende i den anden Gruppe. Det er let at se, at de til hinanden svarende Transformationer i de 2 Grupper have samme Multiplikatorer (hvad der lettest ses, naar Transformationsligningerne ere henførte til Dobbeltplanerne), idet man faar FAF^{-1} ved at anvende Transformationen F^{-1} paa begge Sider af Transformationsligningerne for A.

Man kan derfor betragte det andet System som en Transformation af det første, idet det anførte viser, at vi ved at gaa over til dette kun indføre et nyt Koordinantsystem.

Dobbeltpunkter og Dobbeltplaner i det nye System ere Transformationer af de tilsvarende Størrelser i det oprindelige System ved Transformationen F. Thi lad os antage, at et Dobbelpunkt P for Transformationen A ved F transformeres til P', saa vil P' ved F^{-1} transformeres til P, ved A lades P uforandret og ved F transformeres P til P'. Altsaa er P' et Dobbeltpunkt for FAF^{-1}.

Vi kalde det, at danne en ligedannet Gruppe med en given ved at underkaste alle den sidste Gruppes Transformationer Operationen $F - F^{-1}$, at transformere den ved F.

13) Vi ville nu undersøge, hvornaar en Transformation A bliver uforandret ved at transformeres ved en Transformation F. Skal A blive uforandret ved Transformation ved F, maa den have de samme Dobbeltpunkter efter Transformationen som før Transformationen.

Vi se altsaa, at den bliver uforandret, hvis F har de samme Dobbeltpunkter som A.

Hvis F ikke har de samme Dobbeltpunkter som A, maa den ombytte de Dobbeltpunkter indbyrdes, den ikke har fælles med A. Ombytter den kun saadanne Dobbeltpunkter, der svare til samme Multiplikator, vil A ogsaa blive uforandret. I andet Tilfælde maa F kredsforskyde saadanne Dobbeltpunkter, hvis Multiplikatorer kun ere forskjellige ved en Faktor, der er en $(n+1)$te Rod af Enheden.

Lad os antage, at F forvandler Dobbeltpunkterne

$$P \text{ til } P_1, \quad P_1 \text{ til } P_2 \ \ldots\ P_{r-1} \text{ til } P_r, \quad P_r \text{ til } P,$$

saa maa man have, naar der til P svarer en Multiplikator m, og α er en $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden,

$$\begin{array}{llll} \text{at der til} & P_1 & \text{svarer} & m\alpha \\ \text{—} & P_2 & \text{—} & m\alpha^2 \\ \text{—} & P_3 & \text{—} & m\alpha^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{—} & P_r & \text{—} & m\alpha^r. \end{array}$$

Skal nu FAF^{-1} være identisk med F, saa maa man, da Multiplikatorerne kun ere bestemte paa én Faktor nær, der er en vilkaarlig $(n+1)^{\text{te}}$ Rod af Enheden, og da i FAF^{-1} P_1 faar Multiplikatoren m, have, at alle Multiplikatorerne for FAF^{-1} blive identiske med dem for A ved Multiplikation med α. Man maa da have

$$m\alpha^{r+1} = m,$$

saa at

$$\alpha^{r+1} = 1,$$

men da $r+1 \leqq n+1$, er kun $FAF^{-1} \equiv A$, hvis $(r+1)$ er et Submultiplum af $(n+1)$. Har A flere Dobbeltpunkter end de her omtalte $r+1$, maa disse kredsforskydes paa samme Maade, saa at i dette Tilfælde Dobbeltpunkterne maa deles i Grupper paa $r+1$ og $r+1$, hvis Multiplikatorer alle ere forbundne paa samme Maade som ved den omtalte Gruppe.

Er der p saadanne Grupper paa $r+1$ Punkter, maa man have, naar de tilsvarende Multiplikatorer ere

$$\left.\begin{array}{llll} m_1, & m_2 & \ldots & m_p \\ m_1\alpha, & m_2\alpha & \ldots & m_p\alpha \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1\alpha^r, & m_2\alpha^r & \ldots & m_p\alpha^r, \end{array}\right\} \quad (31)$$

at

$$(m_1 . m_2 \ \ldots\ m_p)^{r+1} \alpha^{\frac{r}{2}} = 1,$$

hvorved er bestemt en Relation mellem $m_1, m_2 \ldots m_p$.

Ved dette sidste er nærmest tænkt paa det Tilfælde, at alle Multiplikatorerne vare forskjellige; men, som det ses, kan det ogsaa nemt anvendes, naar flere ere lige store.

14) Vi ville nu undersøge, hvad der er af Vigtighed for det følgende, hvorledes det forholder sig, naar et eller flere Elementer i Transformationsdeterminanten ere 0 for alle Transformationerne i en Gruppe. Vi kunne antage, at Elementerne $a_1, a_2 \ldots a_r$, og de tilsvarende Elementer ikke ere 0 for alle Transformationer i Gruppen, men at derimod

a_{r+1}, a_{r+2} ... a_{n+1} og de tilsvarende Elementer ere 0 for alle Transformationer i Gruppen. Vi kunne altid ordne Transformationen paa en saadan Maade, at i den første Søjle de Elementer, der ikke ere 0 i alle Transformationer komme først.

Er nu C en vilkaarlig Transformation i Gruppen (Koefficienterne i C betegnes ved α_1, β_1 ... o. s. v.) og dannes $CA^m B$, hvor A og B have samme Betydning som i (10), faas for det Element, der svarer til a_{r+1}

$$\beta^m \beta_{r+1} a_2 + \gamma^m \gamma_{r+1} a_3 + \ldots \varepsilon^m \varepsilon_{r+1} a_r = 0\,, \tag{31}$$

idet de øvrige Led af denne Størrelse falde væk, da $a_{r+1} = a_{r+2} \ldots a_{n+1} = 0$. Men heraf følger, at

$$\beta_{r+1} a_2 = \gamma_{r+1} a_3 \ldots = \varepsilon_{r+1} a_r = 0,$$

da Ligningen (31) skal gjælde for alle Værdier af m. β_{r+1} og a_2 kunne nu være Koefficienter i ganske vilkaarlige Transformationer hørende til Gruppen, og da a_2 ikke er 0 for alle Transformationer, maa β_{r+1} være det. Paa samme Maade ses at

$$\gamma_{r+1} = \delta_{r+1} \ldots = \varepsilon_{r+1} = 0.$$

Man faar da ligeledes

$$\begin{array}{l} \beta_{r+2} = \gamma_{r+2} = \ldots \varepsilon_{r+2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} = \ldots \varepsilon_{n+1} = 0, \end{array}$$

d. v. s. for de sidste $n+1-r$ Rækker i enhver Transformationsdeterminant hørende til Gruppen er de første r Elementer 0.

Transformationsdeterminanten for B ser da saaledes ud

$$\left.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & e_1 & f_1 & g_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & e_2 & f_2 & g_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r & b_r & c_r & \ldots & e_r & f_r & g_r & \ldots & l_r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f_{r+1} & g_{r+1} & \ldots & l_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f_{r+2} & g_{r+2} & \ldots & l_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f_{n+1} & g_{n+1} & \ldots & l_{n+1} \end{vmatrix}\right\} \tag{32}$$

Til Exempel hidsættes, hvorledes Transformationsdeterminanten maa se ud for en Mangfoldighed af 4de Orden, naar Elementerne svarende til a_4, a_5 skulle være 0 i alle Transformationer. Den maa være

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}.$$

Det ses tillige, at hvis Transformationsdeterminanterne for 2 Transformationer have Formen (32), vil Determinanten for disse 2 Transformationers Produkt have samme Form.

Endvidere ses det, at alle Elementerne i Produktet af de 2 Transformationer svarende til Elementerne i Determinanterne

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & e_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r & b_r & c_r & \ldots & e_r \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} f_{r+1} & g_{r+1} & \ldots & l_{r+1} \\ f_{r+2} & g_{r+2} & \ldots & l_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n+1} & g_{n+1} & \ldots & l_{n+1} \end{vmatrix}$$

ere uafhængige af Værdierne af de til

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & \ldots & l_1 \\ f_2 & g_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_r & g_r & \ldots & l_r \end{vmatrix}$$

svarende Elementer i de 2 Determinanter.

Hvad der her er sagt om Produktet af 2 Transformationer, hvis Determinant er af Formen (32), kan naturligvis udvides til at gjælde om Produktet af et vilkaarligt Antal Transformationer, hvis Determinanter ere af denne Form.

Vi ville i det følgende i de almindelige Undersøgelser ikke videre beskjæftige os med Transformationsgrupper, hvis Transformationer alle have Determinanter af Formen (32), eller hvor altsaa i alle Determinanterne et Element f. Ex. det, der svarer til a_r er 0, idet Undersøgelsen af saadanne Grupper af n Variable altid kan føres tilbage til Undersøgelsen af Transformationsgrupper for et ringere Antal Variable.

Vi ville derfor i det følgende forudsætte, at ikke alle Elementer svarende til et Element, f. Ex. a_r, i en Transformationsdeterminant ere 0.

Vi kunne da ogsaa forudsætte, at vi ikke kunne have et Element i en Transformationsdeterminant lig 0, uden at den tilsvarende Underdeterminant ogsaa er 0. Thi var f. Ex. $a_2 = 0$ uden at A_2 var 0, maatte ifølge (28) β_1 være 0, det vil sige Elementerne svarende til b_1 maatte være 0 for alle Transformationsdeterminanter i Gruppen.

15) Vi antage nu, at en Gruppe indeholder de i 10, nævnte Transformationer A og B, og at vi transformere Gruppen ved Transformationen

$$F \equiv \begin{cases} \mu x' = px \\ \mu y' = py \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu v' = tv, \end{cases}$$

hvor p, q, ... t ere ganske vilkaarlige Konstanter (der dog ikke kunne være 0). Produktet af $p.q.b\ldots t$ behøver ikke at være 1.

Transformationen A bliver herved helt uforandret, medens B bliver til

$$\begin{aligned} \mu x' &= a_1 x + \frac{pb_1 y}{q} + \frac{pc_1 z}{r} \ldots \frac{pl_1 v}{t} \\ \mu y' &= \frac{qa_2 x}{p} + b_2 y + \frac{qc_2 z}{r} \ldots \frac{ql_2 v}{t} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu v' &= \frac{la_{n+1} x}{p} + \frac{lb_{n+1} y}{q} \ldots l_{n+1} v. \end{aligned}$$

Det ses, at medens a_2 bliver erstattet ved $\frac{qa_2}{p}$, bliver A_2 erstattet ved $\frac{pA_2}{q}$. Vi kunne da bestemme $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{r}$ ... o. s. v. saaledes at

$$\begin{aligned} \left|\frac{q}{p} a_2\right| &= \left|\frac{p}{q} A_2\right| \\ \left|\frac{r}{p} a_3\right| &= \left|\frac{p}{r} A_3\right| \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{aligned}$$

saaledes at altsaa alle Elementerne i den første Søjle af den transformerede Transformationsdeterminant faa samme Modulus som deres Underdeterminanter, under den i 14) gjorte Forudsætning.

Idet det ved de følgende Undersøgelser er ligegyldigt, om vi betragte den oprindelige eller den transformerede Gruppe, sætte vi denne i den oprindeliges Sted og antage altsaa at

$$|a_1| = |A_1|,\ |a_2| = |A_2| \ldots |a_{n+1}| = |A_{n+1}|.$$

Det følger da af (30), at

$$a_1 = \overline{A_1}\quad a_2 = \pm\overline{A_2} \ldots a_{n+1} = \pm A_{n+1}, \tag{33}$$

og af (28) ses, at det samme maa finde Sted for en vilkaarlig Transformation i Gruppen, hvis ingen af Elementerne a_1, a_2 ... a_{n+1} ere 0, saa at man altsaa har

$$\alpha_1 = \overline{\Lambda_1}\quad \alpha_2 = \pm\overline{\Lambda_2} \ldots \alpha_{n+1} = \pm \Lambda_{n+1}, \tag{34}$$

idet tillige Fortegnene i begge Ligningerne (33) og (34) svare til hinanden.

Skulde en af Størrelserne a_1, $a_2 \ldots a_{n+1}$, a_p, være 0, maa der findes Transformationer, for hvilke det tilsvarende Element a_p ikke er 0, og vi kunne da bestemme a_p saaledes at det er konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn saa at Ligningerne (33) og (34) i alle Tilfælde bestaa samtidigt, og Fortegnene ere de samme for alle til hinanden svarende Elementer.

Vi danne nu Transformationen $C^{-1}A^mB$. Det Element, der svarer til a_2 i $C^{-1}A^mB$'s Transformationsdeterminant er

$$\alpha^m \mathrm{B}_1 a_1 + \beta^m \mathrm{B}_2 a_2 \ldots \lambda^m \mathrm{B}_{n+1} a_{n+1}.$$

Da det skal være konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn, maa man altsaa have

$$\alpha^m \mathrm{B}_1 a_1 + \beta^m \mathrm{B}_2 a_2 \ldots \lambda^m \mathrm{B}_{n+1} a_{n+1} = \pm\left(\alpha^m \overline{\beta_1 A_1} + \beta^m \overline{b_2 A_2} \ldots + \lambda^m \overline{\beta_{n+1} A_{n+1}}\right).$$

Ligesom før faas heraf

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{B}_1 a_1 & = \pm \overline{\beta_1 A_1} \\ \mathrm{B}_2 a_2 & = \pm \overline{\beta_2 A_2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{B}_{n+1} a_{n+1} & = \pm \overline{\beta_{n+1} A_{n+1}}. \end{array}\right\} \quad (35)$$

Ligningerne (35) vise, hvis ingen af Størrelserne a_1, $a_2 \ldots a_{n+1}$ ere 0, at man for enhver Transformation i Gruppen maa have β_1, $\beta_2 \ldots \beta_{n+1}$ konjugerede med sine Underdeterminanter med positivt eller negativt Fortegn.

Skulde en af Størrelserne, a_p, være 0, kan man ligesom før erstatte den med en tilsvarende Størrelse a_p, der hører til en af de øvrige Transformationer i Gruppen og ikke er 0. Ved at betragte de Ligninger, som faas ved at danne Elementerne svarende til a_3, $a_4 \ldots a_{n+1}$ i $C^{-1}A^mB$, ses paa lignende Maade, at man maa have, at ethvert Element i Transformationsdeterminanten for C er konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn.

I (35) gjælder + eller ÷ eftersom man har $a_2 = \pm A_2$. Man skal i alle Ligningerne (35) bruge det samme Fortegn.

Det ses da, at alle de tilsvarende Elementer i 2den Søjle af Transformationsdeterminanten ere konjugerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn som skal bruges i første Søjle, eller alle med modsat Fortegn af hvad der bruges i første Søjle, eftersom i (35) + eller — Tegnet er det gjældende.

Hvad der her er sagt om anden Søjle, gjælder naturligvis almindeligt.

Da $\beta_1 a_2 = \overline{\mathrm{B}_1 A_2}$ (se 28), ses β_1 og a_2 begge at maatte være konjugerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn, eller man har almindeligt, at 2 Elementer i en Transformationsdeterminant, som ligge symmetrisk m. H. t. Dianogalrækken, ere begge konjugerede med deres Underdeterminant med samme Fortegn.

16) Idet vi stadigt antage, at intet Element er 0 i alle Transformationsdeterminanterne, og at derfor et Element og dets Underdeterminant altid samtidigt ere 0, kunne vi fremsætte de Resultater, hvortil vi ere komne, paa en meget simplere Maade.

Sætte vi nemlig

$$f = x\bar{x} + \varepsilon_1 y\bar{y} + \varepsilon_2 z\bar{z} \dots \varepsilon_n v\bar{v}, \tag{36}$$

hvor $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ er ± 1, eftersom Koefficienterne til $x, y, \dots$ i den første af Transformationsligningerne for en vilkaarlig Transformation B (se 10) i Gruppen er konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn, saa skulle vi vise at f bliver uforandret, naar vi for $x, y \dots$ sætte $\mu x', \mu y' \dots$ o. s. v., idet samtidigt $\bar{x}, \bar{y} \dots$ o. s. v. erstattes ved de konjugerede Værdier $\overline{\mu x'}, \overline{\mu y'} \dots$ o. s. v. Man skal altsaa have

$$f = \mu\bar{\mu}\,[x'\bar{x}' + \varepsilon_1 y'\bar{y}' + \varepsilon_2 z'\bar{z}' \dots \varepsilon_n v'\bar{v}']. \tag{37}$$

Dette kræver, at

$$\left.\begin{array}{l} a_1\bar{a}_1 + \varepsilon_1 a_2\bar{a}_2 \dots \varepsilon_n a_{n+1}\overline{a_{n+1}} = 1 \\ b_1\bar{b}_1 + \varepsilon_1 b_2\bar{b}_2 \dots \varepsilon_n b_{n+1}\overline{b_{n+1}} = \varepsilon_1 \\ c_1\bar{c}_1 + \varepsilon_1 c_2\bar{c}_2 \dots \varepsilon_n c_{n+1}\overline{c_{n+1}} = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1\bar{l}_1 + \varepsilon_1 l_2\bar{l}_2 \dots \varepsilon_n l_{n+1}\overline{l_{n+1}} = \varepsilon_n, \end{array}\right\} \tag{38}$$

og at

$$\left.\begin{array}{l} a_1\bar{b}_1 + \varepsilon_1 a_2\bar{b}_2 + \varepsilon_2 a_3\bar{b}_3 \dots \varepsilon_n a_{n+1}\overline{b_{n+1}} = 0 \\ a_1\bar{c}_1 + \varepsilon_1 a_2\bar{c}_2 + \varepsilon_2 a_3\bar{c}_2 \dots \varepsilon_n a_{n+1}\overline{c_{n+1}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1\bar{c}_1 + \varepsilon_1 b_2\bar{c}_2 + \varepsilon_2 b_3\bar{c}_3 \dots \varepsilon_n b_{n+1}\overline{c_{n+1}} = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{39}$$

Ligningerne (38) angive nemlig, at Koefficienterne til $x\bar{x}, y\bar{y} \dots$ i (37) ere lig med de tilsvarende i (36), og Ligningerne (39), at Koefficienterne til $x\bar{y}, x\bar{z} \dots$ i (37) ere 0.

Men da

$$\begin{array}{l} A_1 = \bar{a}_1, \quad A_2 = \varepsilon_1\bar{a}_2 \dots A_{n+1} = \varepsilon_n\overline{a_{n+1}} \\ B_1 = \varepsilon_1\bar{b}_1, \quad B_2 = \varepsilon_1^2\bar{b}_2 \dots B_{n+1} = \varepsilon_1\varepsilon_n\overline{b_{n+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1 = \varepsilon_n\bar{l}_1, \quad L_2 = \varepsilon_n\varepsilon_1\bar{l}_2 \dots L_{n+1} = \varepsilon_n^2\overline{l_{n+1}} \end{array}$$

ses herved, at baade (38) og (39) ere rigtige.

Omvendt ses det, at hvis Størrelserne $\mu x', \mu y' \dots \mu v'$ indsatte for $x, y, z \dots$ o. s. v. i (36), medens $\overline{\mu x'}, \overline{\mu y'} \dots$ indsættes for $\bar{x}, \bar{y} \dots$, lade disse identisk uforandret, maa Koefficienterne for Transformationen, B, opfylde de i 15) fremsatte Betingelser.

Thi da Ligningerne (38) og (39) gjælde, har man f. Ex.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \overline{a_1} + \varepsilon_1 a_2 \overline{a_2} + \varepsilon_2 a_3 \overline{a_3} \ldots \varepsilon_n a_{n+1} \overline{a_{n+1}} = 1 \\ a_1 \overline{b_1} + \varepsilon_1 a_2 \overline{b_2} + \varepsilon_2 a_3 \overline{b_3} \ldots \varepsilon_n a_{n+1} \overline{b_{n+1}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \overline{l_1} + \varepsilon_1 a_2 \overline{l_2} + \varepsilon_3 a_3 \overline{l_3} \ldots \varepsilon_n a_{n+1} \overline{l_{n+1}} = 0. \end{array}\right\} \quad (40)$$

Betragtes i (40) $a_1, \varepsilon_1 a_2, \varepsilon_2 a_3 \ldots \varepsilon_n a_{n+1}$ som Ubekjendte, faas heraf

$$a_1 = \frac{\overline{A_1}}{D}, \quad \varepsilon_1 a_2 = \frac{\overline{A_2}}{D} \ldots \varepsilon_n a_{n+1} = \frac{\overline{A_{n+1}}}{D},$$

hvor D er Transformationsdeterminanten. Er nu Transformationen, som forudsat i 1), bragt paa en saadan Form, at $D = 1$, har man altsaa

$$a_1 = \overline{A_1}, \quad \varepsilon_2 a_2 = \overline{A_2} \ldots \varepsilon_n a_{n+1} = \overline{A_{n+1}},$$

og paa samme Maade ses alle de andre Koefficienter at være konjugerede med deres Underdeterminanter i D med passende Fortegn, og at disse Fortegn bestemmes som før, naar man f. Ex. kjender de Fortegn, som bruges ved Koefficienterne i den første Transformationsligning. Iøvrigt ses, at selve den Betingelse, at $\mu x', \mu y' \ldots$ o. s. v. indsat for $x, y \ldots$ o. s. v., $\overline{\mu x'}, \overline{\mu y'} \ldots$ o. s. v. indsat for $\overline{x}, \overline{y} \ldots$ o. s. v., skal lade f uforandret, medfører $|D| = 1$.

Man har nemlig

$$\begin{vmatrix} a_1\overline{a_1} + \varepsilon_1 a_2 \overline{a_2} \ldots \varepsilon_n a_{n+1}\overline{a_{n+1}}, & a_1\overline{b_1} + \varepsilon_1 a_2 \overline{b_2} \ldots \varepsilon_n a_{n+1}\overline{b_{n+1}}, & \ldots a_1\overline{l_1} + \varepsilon_1 a_2 \overline{l_2} \ldots \varepsilon_n a_{n+1}\overline{l_{n+1}} \\ b_1\overline{a_1} + \varepsilon_1 b_2 \overline{a_2} \ldots \varepsilon_n b_{n+1}\overline{a_{n+1}}, & b_1\overline{b_1} + \varepsilon_1 b_2 \overline{b_2} \ldots \varepsilon_n b_{n+1}\overline{b_{n+1}}, & \ldots b_1\overline{l_1} + \varepsilon_1 b_2 \overline{l_2} \ldots \varepsilon_n b_{n+1}\overline{l_{n+1}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l_1\overline{a_1} + \varepsilon_1 l_2 \overline{a_2} \ldots \varepsilon_n l_{n+1}\overline{a_{n+1}}, & l_1\overline{b_1} + \varepsilon_1 l_2 \overline{b_2} \ldots \varepsilon_n l_{n+1}\overline{b_{n+1}}, & \ldots l_1\overline{l_1} + \varepsilon_1 l_2 \overline{l_2} \ldots \varepsilon_n l_{n+1}\overline{l_{n+1}} \end{vmatrix}$$

$$= 1 . \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = 1 . \varepsilon_1 . \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n D \cdot \overline{D}.$$

Vi ville nu anvende de i det foregaaende udviklede Principper, der forøvrigt passe ligesaa godt paa diskontinuerte Grupper, til at finde de endelige Grupper af 1 og 2 Variable.

Af disse ere de endelige Grupper af 1 Variabel kjendte fra Kleins Undersøgelser. Han kommer som bekjendt til at konstruere alle endelige Grupper ad geometrisk Vej, nemlig ved at vise deres Sammenhæng med de regulære Polyedre. Tilsyneladende er Kleins Raisonnementer simplere end de her fremsatte; men deres Simplicitet kommer egentlig kun deraf, at man i Forvejen kjender de regulære Polyedre nøje. Vare disse ubekjendte vilde vistnok Konstruktionen af Grupperne ved geometriske Raisonnementer være vanskelig nok.

Her skal Gruppernes Antal og Beskaffenhed udledes ad rent algebraisk Vej.

III. De endelige Transformationsgrupper, hvorved en ret Linie transformeres til sig selv.

17) Vi ville antage, at 2 Transformationer i Gruppen ere A og B (dens Grundtransformationer), og at Gruppen kan tænkes fremkommet ved Sammensætning af disse [1]).

Idet A og B skulle transformere en ret Linie til sig selv, kunne vi tænke os dem bragt paa Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y. \end{cases}$$

Vi kunne da for det første se, at vi ikke i A kunne have $a_2 = 0$, uden at ogsaa b_1 er 0.

Thi i dette Tilfælde er a_1 og b_2 A's Multiplikatorer. Da disse skulle være Rødder af Enheden, naar Gruppen skal være endelig, og A's Determinant skal være 1, har man $a_1 = \overline{b_2}$. Man har da

$$A^{-1} \equiv \begin{cases} \mu x' = \overline{a_1} x - b_1 y \\ \mu y' = \dots . \quad a_1 y, \end{cases}$$

og sætte vi $C \equiv BAB^{-1}A^{-1}$, har man

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x + a_1 b_1 (\alpha^2 - 1) y \\ \mu y' = y. \end{cases}$$

Man har nemlig $\alpha = \overline{\beta}$, da α og β ere B's Multiplikatorer, og $\alpha\beta$ altsaa lig 1.

Skal nu C høre til en endelig Gruppe, maa man have

$$b_1 (\alpha^2 - 1) = 0.$$

Man kan ikke have $\alpha^2 - 1 = 0$; thi da maatte β være lig α, og B være en identisk Transformation. Vi maa altsaa have $b_1 = 0$. a_2 og b_1 ere da 0 paa samme Tid, og vi kunne da ifølge foregaaende Afsnit altid forudsætte

$$a_1 = \overline{b_2}, \quad a_2 = \pm b_1,$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$

[1]) Vi skulle senere se, at vi ikke behøve flere end 2 Grundtransformationer.

Da A's Multiplikatorer α' og $\overline{\alpha'}$ ere Rødder i Ligningen

$$\mu^2 - (a_1 + b_2)\mu + 1 = 0,$$

maa man desuden have

$$a_1 + b_2 = \alpha' + \overline{\alpha'},$$

hvor α' er en Rod af Enheden.

Hvis Multiplikatorerne ere ulige $(2n+1)^{\text{te}}$ Rødder af Enheden, er Transformationen af $(2n+1)^{\text{te}}$ Orden; ere de lige $2n^{\text{te}}$ Rødder af Enheden, er Transformationen af n^{te} Orden.

Ligningen $D = 1$ kan skrives

$$|a_1|^2 \pm |b_1|^2 = 1. \tag{41}$$

Vi skulle nu først vise, at hvis Gruppen skal være endelig, maa man altid have

$$b_1 = -\overline{a_2}. \tag{42}$$

Af (41) ses, $|a_1| > 1$ hvis $b_1 = \overline{a_2}$ (med mindre Gruppen kun bestaar af Transformationen af samme Form som B). Lad os danne Transformationen

$$A B A^{-1} B^{-1},$$

saa er dennes Transformationsdeterminant

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha, & b_1\overline{\alpha} \\ a_2\alpha, & b_2\overline{\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2\overline{a_1}, & -b_1\alpha \\ -a_2\overline{\alpha}, & a_1\alpha \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_2 - b_1 a_2 \overline{\alpha^2}, & -a_1 b_1 \alpha^2 + b_1 a_1 \\ a_2 b_2 - a_2 b_2 \overline{\alpha^2}, & a_1 b_2 - a_2 b_1 \alpha^2 \end{vmatrix}$$

hvis Elementer ere Koefficienter for Ligningerne for $A B A^{-1} B^{-1}$. Antages nu $b_1 = \rho e^{i\mu}$, $\overline{\alpha^2} = e^{iv}$, faar man, at Summen af det første og det sidste Element i denne Determinant er

$$2|a_1|^2 - 2\rho^2 \cos v,$$

og da ifølge (41)

$$|a_1|^2 - \rho^2 = 1,$$

$$2|a_1|^2 - 2\rho^2 \cos v > 2,$$

med mindre $v = 0$, eller $\rho = 0$.

Men

$$2|a_1|^2 - 2\rho^2 \cos v = \alpha_1 + \overline{\alpha_1},$$

naar α_1 er en af Multiplikatorerne for $A B A^{-1} B^{-1}$. Denne sidste Ligning er da kun mulig, hvis $v = 0$, eller $\rho = 0$. I første Tilfælde er Multiplikatorerne for $B \pm 1$, B en identisk Transformation.

Man maa da have, idet, efter det foregaaende, $\rho = 0$ heller ikke kan bruges, da A og B saa have samme Dobbeltpunkter, at $b_1 = \overline{a_2}$ er en Umulighed og altsaa

$$b_1 = -\overline{a_2}.$$

Vi have da Sætningen:

Skulle Transformationerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \end{cases}$$

høre til en endelig Gruppe, maa man have

$$a_1 = \overline{b_2}, \quad b_1 = -\overline{a_2}$$

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1.$$

Det ses, at naar vi i

$$f = x\overline{x} + y\overline{y}$$

sætte $\mu x'$ for x, $\mu y'$ for y, bliver f uforandret.

Naar A ombytter B's Dobbeltpunkter, maa A^2 være identisk, idet A^2 har B's Dobbeltpunkter til Dobbeltpunkter, og desuden de samme 2 Dobbeltpunkter som A, forskjellige fra B's Dobbeltpunkter, og en Transformation, der transformerer en ret Linie til sig selv, ikke kan have flere end 2 Dobbeltpunkter uden at være identisk.

Skal A ombytte B's Dobbeltpunkter $x = 0$ og $y = 0$, maa den have Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = b_1 y \\ \mu y' = a_2 x, \end{cases}$$

Omvendt ses det let, at enhver Transformation af samme Form som den her nævnte, A_1 er af anden Orden, idet $b_1 = -\overline{a_2}$.

18) Efter at have bestemt Formen for de enkelte Transformationer hørende til en Gruppe, ville vi søge at løse det Problem:

Hvilke mulige endelige Grupper existerer der, hvis Transformationer transformere en ret Linie til sig selv.

Lad os først antage, at Gruppen indeholder en Transformation A af højere end 2den Orden, saa kunne vi transformere A ved alle Transformationer i Gruppen, d. v. s. danne alle de ligedannede Transformationer $C \equiv BAB^{-1}$, idet B er en vilkaarlig Transformation i Gruppen. Indeholder Gruppen N Transformationer (den identiske Transformation medregnet), ville vi have N Transformationer C, som dog ikke alle ville være forskjellige.

Vi kalde alle de forskjellige Transformationer, som ere dannede af samme Transformation A ved at transformere den ved alle Transformationer i Gruppen, en Samling hørende til A.

Vi ville nu bestemme, hvor mange Transformationer der høre til den Samling, hvortil A hører.

Vi antage, at A er af n^{te} Orden $n > 2$.

Vi se nu for det første, at vi faa samme Samling ved at gaa ud fra en vilkaarlig Transformation hørende til Samlingen. Thi hører C til Samlingen dannet ved A som Udgangspunkt, vil den ogsaa høre til Samlingen dannet fra D som Udgangspunkt, naar D og A høre til samme Samling. Man har nemlig da

$$BAB^{-1} \equiv C$$

$$B_1AB_1^{-1} \equiv D,$$

hvor B og B_1 ere 2 Transformationer hørende til Gruppen. Men heraf faas

$$A \equiv B^{-1}CB \equiv B_1^{-1}DB_1,$$

$$C \equiv BB_1^{-1}DB_1B^{-1},$$

hvorved Sætningen bevises, idet BB_1^{-1} atter er en Transformation hørende til Gruppen.

Ligeledes ses, at der gives lige mange Transformationer i Gruppen, som lade enhver Transformation i Samlingen uforandret. Thi ere atter A og C Transformationer i samme Samling, saa at man har

$$C \equiv BAB^{-1},$$

og lades A uforandret ved Transformationen ved D, altsaa

$$DAD^{-1} \equiv A,$$

saa har man

$$A \equiv B^{-1}CB,$$

og altsaa

$$DB^{-1}CBD^{-1} \equiv B^{-1}CB$$

$$BDB^{-1}CBD^{-1}B^{-1} \equiv C,$$

saa at C lades uforandret ved BDB^{-1}. Da nu tillige 2 Transformationer BDB^{-1} og BD_1B^{-1} ikke kunne være identiske, hvis D og D_1 ikke ere det, svarer til hver Transformation, der transformerer A til sig selv, een Transformation, der transformerer C til sig selv.

Dannes nu den Samling, hvortil A hører, vil det være let af se, hvor mange Transformationer den indeholder.

Vi antage A af n^{te} Grad $n > 2$, da kan A kun lades uforandret ved Transformation af saadanne Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som den.

Vi kunne tillige antage om A, at kun dens Potenser have samme Dobbeltpunkter som den. Thi havde 2 Transformationer A og B samme Dobbeltpunkter og vare 2 Multiplikatorer henholdsvis for A og B α og β, hvor α og β ere Rødder af Enheden, saa vilde en Multiplikator for $A^p B^q$ være $\alpha^p \beta^q$, idet vi antage, at α og β svare til samme Dobbeltpunkt.

Vare nu A og B af Ordenerne n og n_1, M mindste fælles delelige Tal for n og n_1, saa ses det, at p og q kunne bestemmes saaledes, at A^p B^q er af M^{te} Orden. Thi er

$$n = p_1^a \, p_2^b \, p_3^c \ldots ,$$

hvor p_1, p_2, p_3 ... ere Primtal, vil $A^{p_2^b p_3^c}$ ... være af Ordenen p_1^a, og der vil altsaa være en Potens af A, som er af Ordenen p_1^a, en af Ordenen p_2^b ... o. s. v., medens omvendt Produktet af 2 Transformationer med samme Dobbeltpunkter men af Ordenen p_1^a, p_2^b ere af Ordenen p_1^a, p_2^b.

Endvidere ses det, at af 2 Transformationer af samme Orden n med de samme Dobbeltpunkter, den ene altid er en Potens af den anden, da en hvilkensomhelst primisk n^{te} Rod af Enheden altid er en Potens af en anden primisk n^{te} Rod af Enheden, og endelig ses det ved lignende Betragtninger, at naar 2 Transformationer have samme Dobbeltpunkter og Ordenen af den ene n er et Multiplum af Ordenen m af den anden, vil den sidste være en Potens af den første.

Men da fremgaar det, at naar p og q ere bestemte som ovenfor omtalt, baade A og B ere Potenser af $C \equiv A^p B^q$.

Vi kunne altsaa altid, blandt de Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter, vælge en saaledes, at alle de andre ere Potenser af denne, og vi kunne nu netop antage A saaledes valgt. Da der nu findes n saadanne Potenser af A, vil der altsaa i Gruppen findes n Transformationer, der transformere A til sig selv. Altsaa ville vi ved at transformene A ved alle Transformationer i Gruppen faa A n Gange gjentaget, og lige saa ofte ville vi da faa enhver anden Transformation i Samlingen, hvortil A hører, gjentaget.

Kaldes Antallet af Transformationer i Samlingen S, have vi da $nS = N$, eller $S = \frac{N}{n}$. Alle Transformationer i Samlingen have de samme Multiplikatorer. Vi kunne da ikke faa to Transformationer i Samlinger, der have de samme Dobbeltpunkter, uden at den ene er den omvendte Transformation af den anden, idet ved Transformationer, der alle transformere den rette Linie til sig selv, kun saadanne Transformationer baade kunne have samme Dobbeltpunkter og de samme Multiplikatorer, men naturligvis saaledes at den til samme Dobbeltpunkt svarende Multiplikator er forskjellig i de 2 Transformationer.

Skal Samlingen da baade indeholde en Transformation og dens omvendte Transformation, maa Gruppen indeholde Transformationer af 2^{den} Orden, idet kun en Transformation af 2^{den} Orden indbyrdes kan ombytte to Punkter. Er der da ikke nogen Transformation, der ombytter Dobbeltpunkterne for A, maa alle Transformationerne i den Samling, hvortil A hører have forskjellige Dobbeltpunkter. Den Samling, man faar ved for A at sætte en Potens af A, maa da ogsaa indeholde S Transformationer, som alle ere forskjellige fra dem der forekomme i Samlingen, hvortil A hører, idet den kommer til at bestaa af Potenser af alle Transformationer i Samlingen, hvortil A hører. Disse Samlinger indeholde da alle tilsammen $\frac{n-1}{n}N$ Transformationer.

Vi ville for Fremtiden kalde de Samlinger, som tilhøre Transformationer med samme Dobbeltpunkter, for Samlinger der tilhøre disse Dobbeltpunkter, eller for Samlinger der tilhøre en enkelt Transformation med disse Dobbeltpunkter. Er der én Transformation af 2den Orden, som ombytter A's Dobbeltpunkter, vil den Samling, man faar ved for A at sætte A^{-1}, falde sammen med den Samling, hvortil A hører.

Er derimoe A^p ikke den omvendte Transformation af A, vil den Samling, hvortil A^p høre, indeholde S Transformationer forskjellige fra dem, der forekomme i samme Samling som A, medens A^p og A^{n-p} høre til samme Samling, uden at være identiske med hinanden. Dette finder dog kun Sted hvis ikke n lige, og $p = \frac{n}{2}$. I dette Tilfælde bliver A^p af anden Orden og falder sammen med sin omvendte Transformation. Samlingen hvortil A^p hører, kommer da i dette Tilfælde til at indeholde $\frac{S}{2}$ Transformationer.

Hvad enten n er lige eller ulige komme de Samlinger, der tilhøre A (eller dens Dobbeltpunkter) i Alt til at indeholde $\frac{n-1}{2n}N$ Transformationer[1].

Tilbage staar da kun at afgjøre, hvor mange Transformationer en Samling indeholder, der tilhører en Transformation af 2den Orden A, naar A ikke er en Potens af nogen anden Transformation hørende til Gruppen.

Er der nu ikke nogen Transformation i Gruppen, der ombytter A's Dobbeltpunkter, faas ligesom før, at den Samling, hvortil A hører, indeholder $\frac{N}{2}$ Transformationer.

Er der en Transformation B i Gruppen, der ombytter A's Dobbeltpunkter, kunne vi tænke os A transformeret, saa at A har Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = -iy. \end{cases}$$

B maa da have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = by \\ \mu y' = -\bar{b}x, \end{cases}$$

idet $|b| = 1$.

Skulde en Gruppe indeholde en Transformation til, C, som ligeledes transformerede A til sig selv, maatte den have Formen

---

[1]) Nemlig enten for n ulige $\frac{n-1}{2}$ Samlinger hver paa $\frac{N}{n}$ Transformationer, eller for n lige $\frac{n-2}{2}$ Samlinger paa $\frac{N}{n}$ og 1 paa $\frac{N}{2n}$ Transformationer.

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = cy \\ \mu y' = -\bar{c}x. \end{cases}$$

Men da havde man

$$BC \equiv \begin{cases} \mu x' = -b\bar{c}x \\ \mu y' = -\bar{b}cy. \end{cases}$$

Da BC har samme Dobbeltpunkter som A, og efter Forudsætningen ingen anden Transformation maatte have samme Dobbeltpunkter som A, man maa altsaa have

$$b\bar{c} = \pm i.$$

Vi kunne gjerne sætte $+i$, da vi faa samme Transformation B, ved at ombytte b med $-b$. Dette giver

$$b = ic.$$

Men i dette Tilfælde er

$$C \equiv AB,$$

og vi have

$$AB \equiv BA,$$

da

$$BAB \equiv A.$$

Vi se da, at der er 4 Transformationer i Gruppen, der transformere A til sig selv, den identiske Transformation A, B og AB. Den Samling, hvortil A hører, indeholder saaledes $\frac{N}{4}$ Transformationer.

19) Det er herefter let at bestemme, hvilke mulige endelige Transformationsgrupper der gives.

Man maa nemlig have, naar Gruppen indeholder Transformationerne

$$\underline{A_1,\ B_2 \ldots}$$

af Ordenen

$$\underline{n_1,\ n_2 \ldots,}$$

hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes ved nogen Transformation i Gruppen, og Transformationerne

$$\underline{B_1,\ B_2 \ldots}$$

af Ordenen

$$\underline{m_1,\ m_2 \ldots,}$$

hvis Dobbeltpunkter ombyttes af Transformationer i Gruppen, idet vi antage, at de her omtalte Transformationer ikke høre til hinandens Samlinger, og tillige at der ikke gives Transformationer med de samme Dobbeltpunkter som $A_1, A_2 \ldots B_1, B_2 \ldots$ af højere end de her anførte Ordener.

$$N\left(\frac{n_1-1}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_2} \ldots + \frac{m_1-1}{2m_1} + \frac{m_2-1}{2m_2} \ldots\right) + 1 = N, \tag{43}$$

idet Gruppen foruden Samlingerne hørende til $A_1, A_2 \ldots B_1, B_2$ endnu indeholder den identiske Transformation.

Da $\frac{n_1-1}{n_1} \geqq \frac{1}{2}$, kan der kun forekomme en eneste Transformation A_1 med tilhørende Samlinger, hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes af nogen anden Transformation i Gruppen.

Da $\frac{m_1-1}{2m_1} \gtreqless \frac{1}{4}$, kan der, hvis der forekommer en Transformation i Gruppen, hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes, desuden kun i det højeste forekomme een Transformation B_1, med tilhørende Samlinger, saaledes beskaffen, at dens Dobbeltpunkter ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen. Man har altsaa, naar der existerer en Transformation A_1, enten at der ikke hører nogen Transformation B_1 til Gruppen.

I dette Tilfælde har man

$$N\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)+1 = N, \tag{44}$$

$$N = n_1.$$

Da Gruppen kun indeholder n_1 Transformationer, bestaar den alene af A_1 og dens Potenser.

Eller ogsaa indeholder den endnu en Transformation B_1, med tilhørende Samlinger.

I dette Tilfælde har man

$$N\left(\frac{n_1-1}{n_1}+\frac{m_1-1}{2m_1}\right)+1 = N, \tag{45}$$

$$N = \frac{2m_1 n_1}{n_1+2m_1-m_1 n_1}.$$

Nævneren skal her være positiv, saa at man har

$$n_1+2m_1-m_1 n_1 > 0$$

$$(m_1-1)(n_1-2) < 2,$$

idet m_1 og n_1 mindst ere 2. Denne Ligning kan da kun tilfredsstilles, hvis enten

$$m_1 = 2, \quad n_1 = 3,$$

eller

$$n_1 = 2, \quad m_1 \text{ vilkaarlig}.$$

I det første Tilfælde maa N være 12.

Gruppen indeholder 12 Transformationer. Den maa bestaa af en Transformation af 3die Orden med dertil hørende Samlinger, indeholdende i Alt 8 Transformationer, samt en Transformation af 2den Orden, med den dertil hørende Samling, bestaaende af 3 Transformationer.

Det vil vise sig, at der existerer en saadan Gruppe, den saakaldte Tetraedergruppe.

I andet Tilfælde er $N = 2m$.

Gruppen indeholder een Transformation A_1 af en vilkaarlig høj Orden m_1, samt de til A_1 hørende Samlinger, indeholdende i Alt m_1-1 Transformationer, samt en Samling af m_1 Transformationer af 2den Orden. Da de til A_1 hørende Samlinger kun bestaa af $m_1 - 1$ Transformationer, bestaa de udelukkende af A_1 og dens Potenser.

Denne Gruppe, den cykliske, existerer ogsaa, naar m_1 er ulige[1]).

Forekommer der ikke nogen Transformation i Gruppen, hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen, faar Ligningen (43) Formen

$$\frac{N}{2}\left(\frac{m_1-1}{m_1}+\frac{m_2-1}{m_2}+\frac{m_3-1}{m_3}\right)+1=N. \tag{46}$$

Den kan ikke indeholde flere Led, da $\dfrac{m_1-1}{2m_1} \overline{\gtrless} \dfrac{1}{4}$.

Ligningen kan imidlertid heller ikke indeholde færre Led; thi Gruppen maa indeholde flere end m_1 Transformationer, da den maa indeholde A_1 og dens Potenser, og desuden en Transformation, der ombytter A_1's Dobbeltpunkter. Manglede nu baade m_2 og m_3, fik man

$$N = \frac{2m_1}{m_1+1} < m_1,$$

og havde man

$$\frac{N}{2}\left(\frac{m_1-1}{m_1}+\frac{m_2-1}{m_2}\right)+1=N,$$

fik man

$$N = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2},$$

som ogsaa er umulig, da vi kunne antage $m_1 \overline{\gtrless} m_2$ og altsaa

$$N \overline{\lessgtr} m_1.$$

(43) maa altsaa nu have Formen (46). I det mindste een af Størrelserne m_1, m_2, m_3 maa være 2; thi ellers vilde den mindste Værdi af $\dfrac{m_1-1}{2m_1}$ være $\dfrac{1}{3}$, og

$$\frac{N}{2}\left(\frac{m_1-1}{m_1}+\frac{m_2-1}{m_2}+\frac{m_3-1}{m_3}\right) \overline{\gtrless} N,$$

hvad der er umuligt.

Vi kunne da sætte $m_1 = 2$, og faa da

$$\frac{N}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{m_2-1}{m_2}+\frac{m_3-1}{m_3}\right)+1=N,$$

eller

$$N = \frac{4m_2m_3}{2m_3+2m_3-m_2m_3}.$$

Man maa da have

$$2m_2+2m_3-m_2m_3>0,$$

eller

$$(m_2-2)(m_3-2)<4.$$

---

[1]) Det er klart, at hvis m_1 lige, maa der ogsaa være en Potens af A_1, der ombytter B_1's Dobbeltpunkter, naar B_1 ombytter A_1's Dobbeltpunkter.

Vi kunne da have følgende Tilfælde:

$$m_2 = 2,\ m_3 \text{ vilkaarlig},$$
$$m_2 = 3,\ m_3 = 3;$$
$$m_2 = 3,\ m_3 = 4,$$
$$m_2 = 3,\ m_3 = 5.$$

I første Tilfælde maa Gruppen bestaa af $N = 2m_3$ Transformationer.

Den skal indeholde 2 Transformationer A og B af 2den Orden med forskjellige tilhørende Samlinger, der hver indeholde $\frac{N}{4} = \frac{m_3}{2}$ Transformationer, og desuden en Transformation C af m_3-die Orden med tilhørende Samlinger indeholdende $\frac{m_3 - 1}{2m_3} N = m_3 - 1$ Transformationer. Altsaa maa de C tilhørende Samlinger kun bestaa af Potenserne af C. Det ses, at m_3 maa være et lige Tal, da $\frac{m_3}{2}$ skal være hel.

Der existerer en saadan Gruppe, den cykliske Gruppe.

Er dernæst

$$m_2 = 3,\ m_3 = 3,$$

faar man $N = 12$; men Gruppen er umulig. Den skulde bestaa af en Transformation af 2den Orden med tilhørende Samling paa 3 Transformationer, og 2 Samlinger paa 4 Transformationer hver, hørende til 2 Transformationer B og C af 3die Orden.

En af Transformationerne, A, maatte ombytte Dobbeltpunkterne for B; men da har man

$$ABA = B^{-1},$$
$$AB = B^{-1}A,$$

saa at AB er af 2den Orden, da den er sin egen omvendte Transformation, og paa samme Maade er da ogsaa AB^{-1} af 2den Orden. De 3 Transformationer af 2den Orden i Gruppen ere da A, AB, AB^{-1}. De ombytte alle 3 B's Dobbeltpunkter. Men paa samme Maade ses, at alle 3 Transformationer ombytte C's Dobbeltpunkter og altsaa kunne skrives A, AC, AC^{-1}, hvad der er umuligt, da dette vilde fordre, at C var identisk med en Potens af B.

Vi have dernæst

$$\underline{m_2 = 3,\ m_3 = 4.}$$

N bliver 24, Gruppen kommer til at bestaa af een Transformation af 2den, een af 3die og een af 4de Orden med tilhørende Samlinger, paa henholdsvis 6, 8, 9 Transformationer. Gruppen existerer, den saakaldte Oktaedergruppe eller Kubusgruppe.

Endelig har man

$$m_2 = 3,\ m_3 = 5.$$

Dette giver $N = 60$. Gruppen kommer til at bestaa af een Transformation af 2den Orden, een af 3die Orden og een af 5te Orden med tilhørende Samlinger paa henholdsvis 15, 20 og 24 Transformationer.

Gruppen existerer, den saakaldte Ikosaedergruppe eller Dodekaedergruppe.

20) Da Bestemmelsen af de mulige Grupper er af saa stor Vigtighed, skal den foretages paa en ny Maade, idet vi udelukkende støtte os paa den Form, det i det foregaaende er vist at Transformationerne maatte have, og antage, at Grupperne mindst indeholde 2 Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter.

Vi have vist, at i enhver Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

hørende til en endelig Gruppe kunne vi antage

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1, \quad a_1 = \overline{b_2} \quad \text{og} \quad a_2 = -\overline{b_1}.$$

Vi antage desuden, at der til Gruppen hører en Transformation

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y, \end{cases}$$

hvis Dobbeltpunkter ere $x = 0$, $y = 0$. Har da A Dobbeltpunkterne (x_1, y_1), (x_2, y_2), saa er Dobbeltforholdet mellem A's og B's Dobbeltpunkter

$$f = \frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2},$$

og om dette kunne vi vise, at det er reelt.

A's Multiplikatorer bestemmes ved Ligningen

$$\mu^2 - (a_1 + \overline{a_1})\mu + 1 = 0, \tag{47}$$

og er μ_1 én af Rødderne i denne Ligning, har man da $\frac{x_1}{y_1}$ bestemt ved

$$\mu_1 x_1 = a_1 x_1 + b_1 y_1$$

eller

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{b_1}{\mu_1 - a_1}.$$

Men af Ligningen (47) følger, da μ skal være en Rod af Enheden,

$$\mu_1 - a_1 = \overline{a_1} - \overline{\mu_1},$$

saa at $\mu_1 - a_1$ er lig med sin egen konjugerede Størrelse med modsat Fortegn eller er rent imaginær.

Vi have da

$$f = \frac{\mu_1 - a_1}{\mu_2 - a_1},$$

idet μ_2 er den anden Rod i (47) og $\mu_2 - a_1$ ligeledes er rent imaginær. Men (48) viser da, at f er reel.

Da A og B kan være 2 vilkaarlige Transformationer i Gruppen, faar man:

I en endelig Transformationsgruppe, der transformerer en ret Linie til sig selv, er Dobbeltforholdet mellem Dobbeltpunkterne for to vilkaarlige Transformationer henhørende til Gruppen altid reelt.

21) Som Følge af 20) kunne vi paavise, at enhver endelig Gruppe Transformationer, der transformerer en ret Linie til sig selv, altid indeholder en Transformation af 2den Orden.

Vi kunne nemlig altid antage, at Gruppen indeholder 2 Transformationer A og B, hvis Dobbeltpunkter ere reelle, og vi antage, at de have forskjellige Dobbeltpunkter og ikke selv ere af 2den Orden, da der i sidste Tilfælde ikke behøvedes noget Bevis.

B antages at have Formen

$$B = \begin{cases} \mu x' = a x \\ \mu y' = \overline{a} y , \end{cases}$$

medens A har Formen

$$A = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y , \end{cases}$$

hvor $a_1 = \overline{b_2}, \ a_2 = -\overline{b_1}$.

Transformeres disse Transformationer ved

$$\mu x' = p x$$
$$\mu y' = q y ,$$

bliver B uforandret, medens A bliver til

$$\mu x' = a_1 x + \frac{q}{p} b_1 y$$

$$\mu y' = a_2 \frac{p}{q} x + b_2 y ,$$

og bestemmes nu

$$\frac{q}{p} b_1 = i \, | \, b_1 \, | ,$$

vil man have $\frac{p}{q} a_2 = i \, | \, b_1 \, |$, saa at Dobbeltpunkterne for A efter 20) ere reelle.

Danne vi nu AB^2A og antage, at denne er af $n$te Orden, saa er $(AB^2A)^{\frac{n}{2}}$ af 2den Orden, hvis n er lige.

Hvis n derimod er ulige, saa er

$$(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB \, . \, BA (AB^2A)^{\frac{n-1}{2}}$$

en identisk Transformation. De 2 Dele, der ere adskilte ved Multiplikationstegnet, ere saaledes beskafne, at den ene faas af den anden ved at ombytte A med B. Da Dobbeltpunkterne i A og B ere reelle, saa faas de omvendte Transformationer af A og B ved i Stedet for Koefficienterne i Transformationsligningerne at sætte de konjugerede Størrelser. Dette ses let ved at henføre Transformationerne til Dobbeltpunkterne, og altsaa for A sætte

$$\mu(x'y_1 - y'x_1) = \alpha'(xy_1 - yx_1)$$
$$\mu(x'y_2 - y'x_2) = \overline{\alpha}'(xy_2 - yx_2),$$

idet (x_1, y_1) (x_2, y_2) er Dobbeltpunkternes Koordinater, α', $\overline{\alpha}'$ Transformationens Multiplikatorer.

Man har da, at

$$C = (AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB$$

og

$$C_1 = (A^{-1}B^{-2}A^{-1})^{\frac{n-1}{2}} A^{-1}B^{-1}$$

have konjugerede Multiplikatorer og konjugerede Dobbeltpunkter (d. v. s. Koordinaterne til deres Dobbeltpunkter have konjugerede Værdier).

Men kaldes

$$BA(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} = C_2,$$

saa har man

$$C_1 = C_2^{-1},$$

og da $CC_2 = 1$ (d. v. s. er identisk), har man

$$C = C_1.$$

C og C_1's Dobbeltpunkter ere da fælles, og da C bliver uforandret ved at dens Multiplikatorer og Koordinaterne til dens Dobbeltpunkter ombyttes med deres konjugerede Størrelser, maa disse sidste enten være reelle eller konjugerede imaginære Størrelser. Have Dobbeltpunkterne reelle Koordinater, skal Transformationen blive uforandret ved at dens Multiplikatorer ombyttes med deres konjugerede Størrelser, d. v. s. Transformationen og dens omvendte Transformation skulle være identiske, den maa være af 2den Orden eller identisk.

Skulde den være identisk, maatte man have, at AB^2A og AB havde samme Dobbeltpunkter. Men da havde man, at

$$BA = B^{-1}A^{-1} \, . \, AB^2A$$

havde samme Dobbeltpunkter som AB, og da

$$BA = B \, . \, AB \, . \, B^{-1},$$

havde BA og AB samme Multiplikatorer og ere altsaa identiske eller omvendte Transformationer.

I første Tilfælde vilde man have

$$BA = AB$$

eller

$$B = ABA^{-1},$$

hvad der medfører, at baade A og B ere af 2den Orden, stridende mod vore Forudsætninger.

I sidste Tilfælde vilde AB^2A være en identisk Transformation, og altsaa kunde C, der da blev identisk med AB, ikke være det.

Vare Koordinaterne til C's Dobbeltpunkter konjugeret imaginære Størrelser, havde man, naar disses Koordinater kaldtes $\frac{\xi_1}{\eta_1}$, $\frac{\overline{\xi_1}}{\overline{\eta}^1}$, da Dobbeltforholdet mellem Dobbeltpunkterne for 2 vilkaarlige Transformationer skal være reelt [1]),

$$\frac{\xi_1}{\eta_1} : \frac{\overline{\xi_1}}{\overline{\eta_1}} = -1,$$

da for at $\frac{\xi_1}{\eta_1} : \frac{\overline{\xi_1}}{\overline{\eta_1}}$ skal være reel, enten $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\overline{\xi_1}}{\overline{\eta_1}}$, idet begge Størrelser ere reelle, hvad der strider mod Forudsætningen, eller $\frac{\xi_1}{\eta_1} = -\frac{\overline{\xi_1}}{\overline{\eta_1}}$, idet begge Størrelser ere rent imaginære.

Vi skulle nu vise, at der ogsaa i dette Tilfælde maa forekomme Transformationer af 2den Orden i Gruppen.

Vi antage da, at Gruppen indeholder en Transformation

$$A = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = -\overline{b_1} x + \overline{a_1} y \end{cases}$$

og

$$B = \begin{cases} \mu x' = a x \\ \mu y' = \overline{a} y, \end{cases}$$

og at A og B's Dobbeltpunkter ere harmonisk konjugerede.

A's Dobbeltpunkter ere bestemte ved

$$\frac{x}{b_1} = \frac{y}{\mu - a_1},$$

hvor μ er Rod i Ligningen

$$\mu^2 - \mu(a_1 + \overline{a_1}) + 1 = 0,$$

og man maa da have, da A's og B's Dobbeltpunkter skulle være harmonisk konjugerede,

$$\frac{\mu - a_1}{\overline{\mu} - a_1} = -1$$

eller

$$2a_1 = \mu + \overline{\mu},$$

saa at a_1 er reel.

Vi kunne da ogsaa antage, at b_1 er reel (smlgn. S. 49). Transformationen A kan da skrives, idet a og b ere reelle Størrelser,

$$A = \begin{cases} \mu x' = ax + by \\ \mu y' = -bx + ay. \end{cases}$$

Vi kunne tillige antage a og b forskjellige fra 0, det første fordi A ellers var givet at være af 2den Orden.

---

[1]) Da $\frac{\xi_1}{\eta_1} : \frac{\overline{\xi_1}}{\eta_1}$ er Dobbeltforholdet mellem B og C's Dobbeltpunkter.

Vi kunne nu antage, at A er den af alle de Transformationer, hvis Dobbeltpunkter ere harmonisk konjugerede med B's Dobbeltpunkter, hvor den første og sidste Koefficient har den numerisk mindste Værdi. Lad os da danne Transformationen

$$A B^m A B^{-m} A.$$

Denne faar Transformationsdeterminanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \alpha^{2m} b \\ -\bar{\alpha}^{2m} b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a^3 - \alpha^{2m} b^2 a - \bar{\alpha}^{2m} a b^2 - a b^2, & 2a^2 b + \alpha^{2m} a^2 b - \bar{\alpha}^{2m} b^3 \\ -2a^2 b - \bar{\alpha}^{2m} a^2 b + \alpha^{2m} b^3, & a^3 - \alpha^{2m} b^2 a - \bar{\alpha}^{2m} a b^2 - a b^2 \end{vmatrix},$$

og dennes Dobbeltpunkter ere ogsaa harmonisk forbundne med B's Dobbeltpunkter, da første og sidste Element ere reelle.

Man skal da have

$$| a^3 - \alpha^{2m} a b^2 - \bar{\alpha}^{2m} a b^2 - a b^2 | > | a |$$

eller

$$| a^2 - b^2 (\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} + 1) | \geqq 1;$$

men er α forskjellig fra i, kan man altid vælge m saaledes at

$$-2 < \alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} < 0\,[1],$$

saa at

$$| \alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} + 1 | < 1$$

og altsaa, da $a^2 + b^2 = 1$,

$$| a^2 - b^2 (\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} + 1) | < 1.$$

Vi se saaledes, at den gjorte Antagelse ikke kan være rigtig.

22) Vi ville nu anvende det her udviklede til rent algebraisk at bestemme de mulige Grupper. Vi antage stadigt, at der til Gruppen hører 2 Transformationer A og B, af hvilke vi endda antage A af anden Orden, og antage, at baade A og B have reelle Dobbeltpunkter (smlgn. S. 49).

Vi kunne da antage

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y \end{cases}$$

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + i b y \\ \mu y' = i b x + \bar{a}_1 y, \end{cases}$$

hvor b er reel.

Da A er af 2den Orden, skal dens Multiplikatorer være i og $-i$, og man maa da have

$$a_1 + \bar{a}_1 = 0,$$

---

[1]) Er nemlig $\alpha^2 = \cos 2u + i \sin 2u$, kan man altid vælge u saaledes, at $2mu$ ligger i 2den eller 3die Qvadrant.

saa at a_1 er en rent imaginær Størrelse, $a_1 = ia$, hvor a er en reel Størrelse. Vi have da

$$A = \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay. \end{cases}$$

Vi kunne nu enten antage, at Gruppen indeholder lutter Transformationer af 2den Orden, for hvilke Koefficienten til x i første Transformationsligning er 0, eller at dette ikke er Tilfældet. Lad os begynde med det sidste Tilfælde og antage, at i første Transformationsligning for A, a er forskjellig fra 0.

Lad os danne Transformationen

$$A B^m A B^{-m} A,$$

som ogsaa er af 2den Orden (A transformeret ved $A B^m$).

I Stedet for selve Transformationerne opskrives, hvad her oftere vil blive brugt i det følgende, kun deres Determinanter.

Vi have da

$$\begin{vmatrix} ia & ib \\ ib & -ia \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ia & ib\alpha^{2m} \\ ib\bar{\alpha}^{2m} & -ia \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ia & ib \\ ib & -ia \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ia\left(-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m}) + b^2\right), & ib\left(-2a^2 + a^2\alpha^{2m} - b^2\bar{\alpha}^{2m}\right) \\ ib\left(-2a^2 + a^2\bar{\alpha}^{2m} - b^2\alpha^{2m}\right), & -ia\left(-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m}) + b^2\right). \end{vmatrix}$$

Vi antage nu om A, at den er saaledes valgt, at Koefficienten til x i første Ligning har den numeriske mindste Værdi forskjellig fra 0, den kan have i nogen Transformation af 2den Orden hørende til Gruppen. Vi skulle da have

$$|a| \leqq \left| a\left(-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} - 1)\right) \right|,$$

med mindre

$$-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} - 1) = 0.$$

Men vi have $a^2 + b^2 = 1$, og faa da, idet vi sætte $\alpha = \cos u + i \sin u$,

$$-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} - 1) = -1 + 2b^2(1 - \cos 2mu) = -1 + 4b^2 \sin^2 mu,$$

og maa da enten for alle Værdier af m have

$$-1 + 4b^2 \sin^2 mu = 0 \tag{49}$$

eller

$$|-1 + 4b^2 \sin^2 mu| \geqq 1. \tag{50}$$

Det ses, at $-1 + 4b^2 \sin^2 mu$ da maa være en positiv Størrelse, da $4b^2 \sin^2 mu$ er positiv, og

$$-1 + 4b^2 \sin^2 mu > +1,$$

idet vi altid kunne vælge m, saa at $|\sin mu| > 0$, Ligningen (50) kan da skrives

$$2b^2 \sin^2 mu > 1,$$

og da $b < 1$,

$$\sin^2 mu > \tfrac{1}{2}$$

$$|\sin mu| > \sqrt{\tfrac{1}{2}}. \tag{51}$$

Ligning (49) giver

$$|\sin mu| > \tfrac{1}{2}; \tag{52}$$

men det er tydeligt, at kan (52) ikke finde Sted for alle Værdier af m, kan (51) end mindre gjøre det.

Er B nu en Transformation af n^{te} Orden, saa kunne vi, hvad enten n er lige eller ulige antage $u = \frac{p\pi}{n}$, hvor n og p ere indbyrdes primiske.

Den numerisk mindste Værdi, $\sin mn$ kan have, foruden 0, er da $\sin\frac{\pi}{n}$, og man maa da have

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{1}{2}$$

$$n < 6.$$

Vi se saaledes, at hvis en endelig Gruppe indeholder en Transformation af Formen B, og desuden Transformationer af 2^{den} Grad, hvis 1^{ste} Koefficient ikke er 0, kan Gruppen i det højeste indeholde Transformationer af 5^{te} Orden.

Idet vi stadigt antage Gruppen bragt paa en saadan Form, at én af dens Transformationer har Formen B, antage vi nu, at alle dens Transformationer af 2^{den} Orden af Formen A have den 1^{ste} Koefficient i 1^{ste} Transformationsligning lig 0.

Gruppen indeholder da 2 Transformationer, som kan gives Formerne

$$A = \begin{cases} \mu x' = y \\ \mu y' = -x \end{cases}$$

og

$$B = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \overline{\alpha} y. \end{cases}$$

Gruppen kan da ikke indeholde nogen Transformation af Formen

$$C = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = -\overline{b_1} x + \overline{a_1} y, \end{cases}$$

hvor a_1 og b_1 begge ere forskjellige fra 0.

A's og B's Dobbeltpunkter ere nemlig harmonisk konjugerede; og det ses let, at dette er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at 2 givne Transformationer A og B, A af 2^{den} Orden, B af en vilkaarlig Orden kunne transformeres til de Former, A og B her have. C's Dobbeltpunkter maa da ogsaa være harmonisk konjugerede med A's Dobbeltpunkter; thi ellers kunde man transformere Gruppen, saa at C fik en lignende Form, som nu B har, og A vilde da ikke længer have sin første Koefficient lig 0. Ere nu C's Multiplikatorer μ' og $\overline{\mu'}$, er Betingelsen for at C's og A's Dobbeltpunkter ere konjugerede

$$\frac{b_1}{\mu' - a_1}\cdot\frac{b_1}{\overline{\mu'} - a_1} = -1,$$

idet A's Dobbeltpunkter ere $\frac{x}{y} = \pm i$.

Da man har

faas
$$\mu' + \overline{\mu'} = a_1 + \overline{a_1}$$
$$\frac{b_1^2}{1 - |a_1|^2} = \frac{b_1^2}{|b_1|^2} = -1,$$

hvad der vilde kræve, at b_1 var rent imaginær. Men var b_1 rent imaginær og dannede man
$$BC \equiv \begin{cases} \mu x' = a a_1 x + a b_1 y \\ \mu y' = -\overline{a b_1} x + \overline{a a_1} y, \end{cases}$$

da var her ikke ab_1 rent imaginær, og altsaa BC's Dobbeltpunkter ikke harmonisk konjugerede med A's, hvorved ses, at Gruppen umuligt kan indeholde en Transformation af Formen C.

Gruppen kunde da kun indeholde én Transformation og dens Potenser af Formen B, og desuden kun Transformationer af Formen
$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = b y \\ \mu y' = -\overline{b} x. \end{cases}$$

Lad os nu antage, at Transformationsgruppen indeholder en Transformation af Formen
$$A_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = b_1 y \\ \mu y' = -\overline{b_1} x, \end{cases}$$
saa er
$$A A_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = -b \overline{b_1} x \\ \mu y' = -\overline{b} b_1 y, \end{cases}$$

altsaa en Transformation med samme Dobbeltpunkter som B, og kan altsaa, naar B er passende valgt (smlgn. S. 42), sættes lig en Potens af B. Vi have da
$$A A_1 = B^m$$
eller
$$A_1 = A B^m.$$

Vi kunne da danne hele Gruppen ved Hjælp af A og B, og se, at den kun kommer til at bestaa af B og dens Potenser samt n Transformationer af 2den Orden[1]), som faas ved at multiplicere A med Potenser af B, idet B antages at være af $n$te Orden.

23) Vi ville nu danne en Oversigt over de mulige endelige Transformationsgrupper.

A) Gruppen kan bestaa af Potenser af én Transformation af $n$te Orden. Gruppen indeholder
$$N = n$$
Transformationer.

B) Gruppen indeholder Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter.

Den kan da indeholde (22):

[1]) At de ere af 2den Orden bevises senere se 24).

1) Enten én Transformation af en vilkaarlig høj n^{te} Orden, og Transformationer af 2^{den} Orden der ombytte den 1^{ste} Transformations Dobbeltpunkter. Gruppen indeholder (19)

$$N = 2n$$

Transformationer.

Den indeholder, hvis n ulige, én Samling Transformationer af 2^{den} Orden, hvis n lige, 2 saadanne Samlinger, i de 2 Tilfælde paa henholdsvis n og $\frac{n}{2}$ Transformationer.

2) Gruppen indeholder flere Transformationer af højere end 2^{den} Orden med forskjellige Dobbeltpunkter.

Den indeholder da ifølge (22) ikke Transformationer af højere end 5^{te} Orden. Den kan indeholde ifølge (19):

a) $N = 12$ Transformationer, bestaaende af en Transformation af 3^{die} Orden med dertil hørende Samlinger paa i Alt 8 Transformationer, og en Transformation af 2^{den} Orden med dertil hørende Samling paa 3 Transformationer.

Dette er den saakaldte Tetraedergruppe.

b) $N = 24$ Transformationer af i det højeste 4^{de} Orden. De bestaa af en Transformation af 4^{de} Orden med tilhørende Samlinger paa i Alt 9 Transformationer, en Transformation af 3^{die} Orden med tilhørende Samlinger paa i Alt 8 Transformationer og en Transformation af 2^{den} Orden med tilhørende Samling paa i Alt 6 Transformationer

Dette er den saakaldte Oktaedergruppe eller Kubusgruppe.

c) $N = 60$ Transformationer i det højeste af 5^{te} Orden. De bestaa af en Transformation af 5^{te} Orden med tilhørende Samlinger paa i Alt 24 Transformationer, en Transformation af 3^{die} Orden med tilhørende Samlinger paa 20 Transformationer og en Transformation af 2^{den} Orden med tilhørende Samling paa 15 Transformationer.

Gruppen er den saakaldte Ikosaedergruppe eller Dodekaedergruppe.

24) Vi skulle nu til virkeligt at vise Dannelsen af disse Grupper.

Vi begynde med den cykliske Gruppe, hvis Dannelse egentlig allerede er vist (se 22). Den skal indeholde en Transformation B

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu x' = \bar{a}y \end{cases}$$

af en vilkaarlig høj Orden n, og en Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = by \\ \mu y' = -\bar{b}x \end{cases}$$

af 2^{den} Orden der ombytter B's Dobbeltpunkter. Man har da

$$A\,B^m A = B^{-m}$$

og

$$A\,B^m = B^{-m} A\,,$$

hvoraf ses, at $A\,B^m$ er af 2den Orden, da den er sin egen omvendte Transformation.

Det ses let, at Gruppen kun indeholder Transformationer af Formerne

$$A \text{ og } A\,B^m,$$

thi da $A\,B^m A = B^{-m}$, kan man reducere et Produkt af Transformationer

$$B^m A\,B^{m_1} A\,B^{m_2} A \ldots .$$

ved stadigt at erstatte $AB^{m_1}A$ ved B^{-m_1} o. s. v., til kun at indeholde i det højeste 3 Faktorer og altsaa til at faa Formen

$$B^p A\,B^{p_1},$$

og ved her for $B^p A$ at sætte $A\,B^{-p}$ til

$$A\,B^{p_1 - p}.$$

Herved er da Gruppens Endelighed bevist, og tillige ses ifølge 22), at naar B er passende valgt faar man den fuldstændige Gruppe og ikke en Undergruppe.

Det ses ogsaa, at den indeholder $(n-1)$ Potenser af B, og n Transformationer af 2den Orden, der alle ombytte B's Dobbeltpunkter. Gjorde nemlig en af dem ikke dette, vilde Gruppen mindst indeholde 2 Transformationer af $n$te Orden med forskjellige Dobbeltpunkter.

Transformeres A ved en vilkaarlig Transformation af Gruppen, som kan skrives $B^m A^s$, faas

$$B^m A^s \,.\, A \,.\, A^s B^{-m} = B^m A\,B^{-m} = A\,B^{-2m}.$$

Er n nu et ulige Tal, ses da Samlingen, hvortil A hører, at indeholde alle n Transformationer af 2den Orden, som høre til Gruppen. Er n derimod lige, saa er $B^{-2m} = B^{2\left(\frac{n}{2}-m\right)}$, og Samlingen, hvortil A hører, kommer kun til at indeholde $\frac{n}{2}$ Transformationer. Der er altsaa i dette Tilfælde 2 Samlinger Transformationer af 2den Orden.

25) Vi skulle nu betragte Tetraedergruppen.

Gruppen skal i dette Tilfælde indeholde en Transformation af 3die Orden og en af 2den Orden, der ikke ombytter Dobbeltpunkterne for Transformationen af 3die Orden.

Vi kalde disse Transformationer

$$A = \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iax \end{cases}$$

og

$$B = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y \end{cases} \qquad \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

hvor A er af 2den, B af 3die Orden, og hvor vi antage Gruppen transformeret, saa at baade A og B have reelle Dobbeltpunkter, saa at a og b ere reelle.

Til Gruppen hører da ogsaa

$$BA \equiv \begin{cases} \mu x' = i\alpha a x + i\alpha b y \\ \mu y' = i\bar{\alpha} b x - i\bar{\alpha} a x \end{cases}$$

og

$$B^2A \equiv \begin{cases} \mu x' = i\bar{\alpha} a x + i\bar{\alpha} b y \\ \mu y' = i\alpha b y - i\alpha a x, \end{cases}$$

hvor man ogsaa gjerne kunde skrive

$$B^2A \equiv \begin{cases} \mu x' = -i\bar{\alpha} a x - i\bar{\alpha} b y \\ \mu y' = -i\alpha b x + i\alpha a y. \end{cases}$$

BA og B^2A ses da at have de samme Multiplikatorer, og da a ikke er 0, maa baade AB og A^2B være af 3die Orden. Man maa da have, at den reelle Del af $i\alpha a$ er $\cos\frac{2\pi}{6}$ (eller $\cos\frac{2\pi}{3}$, det er ligegyldigt, hvad vi sætte, da alle Koefficienter i Transformationen, uden at forandre denne, kunne erstattes ved de samme Størrelser med negativt Fortegn). Vi have altsaa, idet $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{-a\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da $a^2 + b^2 = 1$, er $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$, og altsaa maa Transformationerne A og B have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} x \\ \mu y' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} y \end{cases} \tag{54}$$

og

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\sqrt{3}}{3} x + \frac{i\sqrt{6}}{3} y \\ \mu y' = \frac{i\sqrt{6}}{3} x - \frac{i\sqrt{3}}{3} y. \end{cases} \tag{55}$$

Ved Sammensætning af A med Potenser af B faar man Transformationer af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\alpha^p\sqrt{3}}{3} x + \frac{i\alpha^q\sqrt{6}}{3} y \\ \mu y' = \frac{i\bar{\alpha}^q\sqrt{6}}{3} x - \frac{i\bar{\alpha}^p\sqrt{3}}{3} y. \end{cases} \tag{56}$$

Det skal nu vises, at man ved atter at sammensætte 2 Transformationer af Formen C føres tilbage til Transformationer af Formen B eller C.

I Stedet for selve Transformationerne skrives her stadigt kun deres Determinanter. Vi have da

$$\begin{vmatrix} \frac{i\alpha^p\sqrt{3}}{3} & \frac{i\alpha^q\sqrt{6}}{3} \\ \frac{i\bar{\alpha}^q\sqrt{6}}{3} & -\frac{i\bar{\alpha}^p\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{i\alpha^{p_1}\sqrt{3}}{3} & \frac{i\alpha^{q_1}\sqrt{6}}{3} \\ \frac{i\bar{\alpha}^{q_1}\sqrt{6}}{3} & -\frac{i\bar{\alpha}^{p_1}\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{-\alpha^{p+p_1}-2\alpha^{q-q_1}}{3} & -\frac{\sqrt{2}(\alpha^{p+q_1}-\alpha^{q-p_1})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(\bar{\alpha}^{p+q_1}-\bar{\alpha}^{q-p_1})}{3} & \frac{-\bar{\alpha}^{p+p_1}-2\bar{\alpha}^{q-q_1}}{3} \end{vmatrix}.$$

Det gjælder da kun om at vise, at Elementerne

$$\alpha_1 = \frac{-\alpha^{p+p_1}-2\alpha^{q-q_1}}{3} = \frac{-\alpha^{p+p_1}(1+2\alpha^{q-p-p_1-q_1})}{3}$$

og

$$b_1 = -\frac{\sqrt{2}(\alpha^{p+q_1}-\alpha^{q-p_1})}{3} = -\frac{\sqrt{2}\,\alpha^{p+q_1}(1-\alpha^{q-p-p_1-q_1})}{3},$$

atter have samme Former som de tilsvarende Elementer i Transformationsdeterminanterne for (54) og (56).

Men som det ses, kommer dette kun an paa, hvilke Former

$$a' = -\frac{1+2\alpha^{q-p-p_1-q_1}}{3}$$

og

$$b' = -\frac{\sqrt{2}(1-\alpha^{q-p-p_1-q_1})}{3}$$

kunne antage. Vi kunne lade $q-p-p_1-q_1$ være 0, 1 eller -1.

1) Er $q-p-p_1-q_1 = 0$ faas

$$a' = -1$$
$$b' = 0.$$

Kaldes de 2 Transformationer, vi have multipliceret, C og D, faas da

$$CD = B^{p+p_1}.$$

Er $q-p-p_1-q_1 = \pm 1$, faas

$$a' = -\frac{1+2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)}{3} = \mp\frac{\sqrt{3}\,i}{3}$$

$$b' = -\frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)}{3} = -\frac{\sqrt{2}(3\mp i\sqrt{3})}{6} = \begin{cases} \frac{-i\sqrt{6}}{3}\,\alpha \\ \frac{i\sqrt{6}}{3}\,\alpha, \end{cases}$$

saa at CD bliver af Formen (56).

Det er saaledes vist, at Gruppen er endelig.

Da Transformationerne henhørende til Gruppen er indbefattet i Formerne B^m og C, hvor p og q kan gives Værdierne 0, ± 1, ses Gruppen at indeholde 11 Transformationer foruden den identiske Transformation, og den er saaledes ifølge det foregaaende fuldstændig, d. v. s. er ikke Undergruppe i nogen anden Gruppe, der indeholder Transformationer af i det højeste 3die Orden. Tager man ikke Hensyn til at Transformationsdeterminanten skal være 1, og sætter man x for $\frac{x}{y}$, kan Gruppen dannes ved følgende simple Transformationer

$$A \equiv x' = \frac{-x+2}{x+1}$$

og

$$B \equiv x' = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)x.$$

26) Oktaedergruppen eller Kubusgruppen.

Gruppen skal indeholde Transformationer af 2den, 3die og 4de Orden.

Vi antage, at der til Gruppen hører 2 Transformationer

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay, \end{cases}$$

som er af 2den Orden, og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y, \end{cases} \quad \text{hvor } \alpha = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2},$$

som er af 4de Orden, og ligesom før at a og b ere reelle. Vi faa da

$$BA \equiv \begin{cases} \mu x' = i\alpha ax + i\alpha by \\ \mu y' = i\bar{\alpha} bx - i\bar{\alpha} ay, \end{cases}$$

$$B^2A \equiv \begin{cases} \mu x' = -ax - by \\ \mu y' = bx - ay, \end{cases}$$

$$B^3A \equiv \begin{cases} \mu x' = i\bar{\alpha} ax + i\bar{\alpha} by \\ \mu y' = i\alpha bx - i\alpha ay, \end{cases}$$

hvor den sidste Transformation kan skrives

$$\begin{aligned} \mu x' &= -i\bar{\alpha} ax - i\bar{\alpha} by \\ \mu y' &= -i\alpha bx + i\alpha ay. \end{aligned}$$

BA og B^3A have da samme Multiplikatorer, medens B^2A har forskjellige Multiplikatorer fra disse, og da ingen af disse Transformationer kunne være af 2den Orden, maa de være af 3die eller 4de Orden. Da nu $-a$ er numerisk større end den reelle Del af $i\alpha a$, maa B^2A være af 4de Orden, BA og B^3A af 3die Orden. Vi have da

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Transformationerne A og B kunne da skrives

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{i\sqrt{2}}{2} x + \dfrac{i\sqrt{2}}{2} y \\[2ex] \mu y' = \dfrac{i\sqrt{2}}{2} x - \dfrac{i\sqrt{2}}{2} y \end{cases} \tag{57}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} x \\[2ex] \mu y' = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} y. \end{cases} \tag{58}$$

Vi se da, at der i Gruppen maa forekomme alle mulige Transformationer af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{\alpha^p i\sqrt{2}}{2} x + \dfrac{\alpha^q i\sqrt{2}}{2} y \\[2ex] \mu y' = \dfrac{\bar{\alpha}^q i\sqrt{2}}{2} x - \dfrac{\bar{\alpha}^p i\sqrt{2}}{2} y, \end{cases} \tag{59}$$

hvor $p + q \equiv 0 \pmod{2}$, eller hvor $p + q$ er et lige Tal.

Gruppens Endelighed vises nu ligesom ved Tetraedergruppen, ved at vise at Produktet af 2 Transformationer af Formen (59) atter blive enten af samme Form, af Formen (58) eller endelig af Formen

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^r y \\ \mu y = -\bar{\alpha}^r x, \end{cases} \tag{60}$$

idet det let ses, at Sammensætning af Transformationer af Formen (59) med Transformationer af de nævnte Former atter vil føre tilbage til de nævnte Former.

Idet vi atter kun opskrive Determinanterne, have vi

$$CD = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha^p i\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\alpha^q i\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \dfrac{\bar{\alpha}^q i\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\bar{\alpha}^p i\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha^{p_1} i\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\alpha^{q_1} i\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \dfrac{\bar{\alpha}^{q_1} i\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\bar{\alpha}^{p_1} i\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{-\alpha^{p+p_1} - \alpha^{q-q}}{2} & \dfrac{-\alpha^{p+q_1} + \alpha^{q-p_1}}{2} \\[2ex] \dfrac{\bar{\alpha}^{p+q_1} - \bar{\alpha}^{q-p_1}}{2} & \dfrac{-\bar{\alpha}^{p+p_1} - \bar{\alpha}^{q-q_1}}{2} \end{vmatrix}.$$

Sætte vi her

$$a = \frac{-\alpha^{p+p_1}(1 + \alpha^{q-q_1-p-p_1})}{2}$$

$$b = \frac{-\alpha^{p+q_1}(1 - \alpha^{q-q_1-p-p_1})}{2},$$

skulle vi altsaa undersøge, hvilke Værdier disse Størrelser kunne antage, idet vi dog maa erindre, at $p+p_1$ og $q+q_1$ paa én Gang ere lige eller ulige, da deres Sum skal være et lige Tal, medens $q-q_1-p-p_1$ altid er et lige Tal, som altsaa kan have Værdierne $0, \pm 2, \pm 4$.

Vi have da

1)
$$q-q_1-p-p_1=0,$$
$$a=-\alpha^{p+p_1},$$
$$b=0.$$

CD har Formen (58).

2)
$$q-q_1-p-p_1=\pm 2, \quad \alpha^{q-q_1-p-p_1}=\pm i,$$
$$a=\frac{-\alpha^{p+p_1}(1\pm i)}{2}=\frac{-\alpha^{p+p_1\pm 1}\sqrt{2}}{2},$$
$$b=\frac{-\alpha^{p+q_1}(1\mp i)}{2}=\frac{\alpha^{p+q_1\mp 1}\sqrt{2}}{2}.$$

Transformationen CD har Formen (59).

3)
$$q-q_1-p-p_1=4, \quad \alpha^{q-q_1-p-p_1}=-1,$$
$$a=0, \quad b=-\alpha^{p+q_1}.$$

Transformationen CD har Formen (60).

Gruppens Endelighed er saaledes bevist.

Det er let at se, hvor mange Transformationer Gruppen indeholder foruden den identiske Transformation. Thi C giver, naar $p=1$ eller 3, $q=1, 3, 5, 7$ otte Transformationer af 3die Orden, naar $p=2$, $q=0, 2, 4, 6$ fire Transformationer af 4de Orden, endelig naar $p=0$, $q=0, 2, 4, 6$ fire Transformationer af 2den Orden. Endelig ses det, at der er fire Transformationer af 2den Orden af Formen (60) og at Potenserne af B giver 3 Transformationer, 2 af 4de, 1 af 2den Orden. Man faar da i det Hele med den identiske Transformation 24 Transformationer.

Det ses heraf, at den fundne Gruppe ikke er Undergruppe i nogen anden endelig Gruppe for den rette Linie.

Tillige ses, at de fundne Tal stemme med, hvad der er fundet S. 56.

Kaldes $\frac{x}{y}$ for x, og tager man ikke Hensyn til at Transformationsdeterminanten skal være 1, kan Gruppen dannes ved Sammensætning af Transformationerne

$$x'=ix$$

og

$$x'=\frac{x+1}{x-1}.$$

27) Vi komme nu til den sidste endelige Gruppe for den rette Linie.

Denne, Ikosaedergruppen, skal efter det foregaaende (se S. 56) indeholde 60 Transformationer, 24 af 5^{te} Orden, 20 af 3^{die} Orden og 15 af 2^{den} Orden. Gruppen indeholder altsaa en Transformation af 2^{den} Orden og en Transformation af 5^{te} Orden. Disse kalde vi

$$A = \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = iby - iax \end{cases}$$

og

$$B = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y, \end{cases} \quad \text{hvor } \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

idet a og b ere reelle Tal.

Vi faa da

$$BA = \begin{cases} \mu x' = i\alpha a x + i\alpha b y \\ \mu y' = i\bar{\alpha} b x - i\bar{\alpha} a y; \end{cases}$$

$$B^2 A = \begin{cases} \mu x' = i\alpha^2 a x + i\alpha^2 b y \\ \mu y' = i\bar{\alpha}^2 b y - i\bar{\alpha}^2 a y, \end{cases}$$

hvor vi skulle have

$$ia(\alpha - \bar{\alpha}) = 2\cos u$$

$$ia(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2) = 2\cos v,$$

hvor u og v ere 5^{te} Dele eller 3^{die} Dele af hele Omdrejningen.

Vi kunne da have $\cos u$ og $\cos v$ lig med

$$\frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}, \quad \frac{1}{2},$$

vi vælge her a negativ, da vi kunne vælge den positiv eller negativ efter Behag. Vi faa

$$\frac{\cos u}{\cos v} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Vi maa da enten have

$$\cos u = \frac{1}{2}$$

$$\cos v = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

eller

$$\cos u = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos v = \frac{1}{2}.$$

Vi faa da enten

$$a = \frac{1}{i(\alpha - \bar{\alpha})} = \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10},$$

$$b = \frac{\pm\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$$

eller

$$a = \frac{1}{i(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2)} = \frac{-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10},$$

$$b = \frac{\pm\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}.$$

Transformationen A er da

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{-i\sqrt{50\pm10\sqrt{5}}}{10}\, x \mp \dfrac{i\sqrt{50\mp10\sqrt{5}}}{10}\, y \\[2ex] \mu y' = \mp \dfrac{i\sqrt{50\mp10\sqrt{5}}}{10}\, x + \dfrac{i\sqrt{50\pm10\sqrt{5}}}{10}\, y. \end{cases} \tag{61}$$

Det skal siden vises, at Gruppen indeholder Transformationer af begge Former, idet dog øverste og nederste Fortegn svare til hinanden.

Vi se, at Gruppen indeholder Transformationer af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\, \alpha^p x - \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\, \alpha^q y \\[2ex] \mu y' = \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\, \bar{\alpha}^q x + \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\, \bar{\alpha}^p y, \end{cases} \tag{62}$$

og det vil vise sig, at den indeholder Transformationer af Formen

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\, \alpha^p x + \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\, \alpha^q y \\[2ex] \mu y' = \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\, \bar{\alpha}^q x + \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\, \bar{\alpha}^p y. \end{cases} \tag{63}$$

Endelig vil man faa Transformationer af Formen

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^p y \\ \mu y' = -\bar{\alpha}^p x. \end{cases} \tag{64}$$

Multiplicerer man 2 Transformationer af Formen (62), faar man, idet atter kun deres Determinanter nedskrives, og Transformationerne kaldes C og F

$$CF \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\alpha^p, & \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\alpha^q \\[2ex] \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\bar{\alpha}^q, & \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\bar{\alpha}^p \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\alpha^{p_1}, & \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\alpha^{q_1} \\[2ex] \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\bar{\alpha}^{q_1}, & \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\bar{\alpha}^{p_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{p+p_1} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^{q-q_1}\right), & -\dfrac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^{p+q_1} - \alpha^{q-p_1}) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\bar{\alpha}^{p+q_1} - \bar{\alpha}^{q-p_1}), & -\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\bar{\alpha}^{p+p_1} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\bar{\alpha}^{q-q_1}\right) \end{vmatrix}.$$

Vi sætte

$$\left.\begin{aligned} a &= -\alpha^{p+p_1}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^{q-q_1-p-p_1}\right] \\ b &= \alpha^{p+q_1}\frac{\sqrt{5}}{5}[1-\alpha^{q-q_1-p-p_1}], \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

og ville nu undersøge, hvilke Værdier a og b kunne antage for $q-q_1-p-p_1=0, \pm 1, \pm 2$.

1) $q-p-p_1-q_1=0$

$$a = \alpha^{p+p_1}$$

$$b = 0,$$

Transformationen bliver en Potens af B.

2) $q-p-p_1-q_1=\pm 1$

$$a = -\alpha^{p+p_1}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\right]$$

$$= \mp\alpha^{p+p_1} i\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\mp\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right]$$

$$= \mp\alpha^{p+p_1\mp 1} i\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10},$$

$$b = -\alpha^{p+q_1}\frac{\sqrt{5}}{5}[1-\alpha^{\pm 1}] = -\alpha^{p+q_1}\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\frac{5-\sqrt{5}}{4}\mp\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\right]$$

$$= \mp i\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\alpha^{p+q_1\mp 2},$$

Transformationen er af Formen (62).

3) Vi sætte $q-q_1-p-p_1=\pm 2$.

Vi faa da

$$a = -\alpha^{p+p_1}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\right]$$

$$= \mp i\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\alpha^{p+p_1\mp 1},$$

$$b = -\alpha^{p+q_1}\frac{\sqrt{5}}{5}[1-\alpha^{\pm 2}]$$

$$= -\alpha^{p+q_1}\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{4}\mp\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right] = \pm\frac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\alpha^{p+q_1\pm 1}.$$

Denne Transformation er af Formen (63).

Multiplicere vi 2 Transformationer af Formen (63) med hinanden, faa vi med de samme Betegnelser

$$\left.\begin{aligned} a &= -\,a^{q-q_1}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,a^{p+p_1-q+q_1}\right] \\ b &= -\,a^{q-q_1}\,\frac{\sqrt{5}}{5}\left[1-a^{p+p_1-q+q_1}\right], \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

hvor vi nu atter kunne bruge det lige udviklede, idet vi sætte $p+p_1-q+q_1=0,\ \pm 1,\ \pm 2.$

Endelig skal her undersøges Resultatet af en Multiplikation af en Transformation af Formen (62) og en Transformation af Formen (63).

Med de samme Betegnelser som før faar man

$$\left.\begin{aligned} a &= +\,a^{q-q_1}\,\frac{\sqrt{5}}{5}\left[1-a^{p+p_1-q+q_1}\right] \\ b &= +\,a^{p+q_1}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,a^{q-q_1-p-p_1}\right], \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

hvor vi atter kunne benytte, hvad der er sagt om (65) og finde da, at vi for $q-q_1-p-p_1 = 0$ faa Transformationer af Formen (64), for $q-q_1-p-p_1=\pm 1$ faa Transformationer af Formen (63) og endelig for $q-q_1-p_1-p_1=\pm 2$ faa Transformationer af Formen (62).

Her er en Transformation af Formen (62) multipliceret med en Transformation af Formen (63); men Multiplikation i den omvendte Orden havde givet ganske lignende Resultat.

Endelig ses det, at vi ikke ved at multiplicere de fundne Transformationer med en Transformation af Formen (64) vilde have faaet nye Transformationsformer frem.

Gruppens Endelighed er saaledes bevist.

Gruppen indeholder Transformationer af Formerne

$$B = \begin{cases} \mu x' = a^p x \\ \mu y' = \bar{a}^p y, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \mu x' = \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\,a^p x + \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\,a^q y \\[2ex] \mu y' = \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\,\bar{a}^q x - \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\,\bar{a}^p y, \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} \mu x' = \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\,a^p x - \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\,a^q y \\[2ex] \mu y' = -\dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\,\bar{a}^q x - \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\,\bar{a}^p y, \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} \mu x' = a^p y \\ \mu y' = -\bar{a}^p x, \end{cases}$$

hvor p og q uafhængigt af hinanden kunne tillægges alle Værdier fra 0 til 4.

Det ses heraf, at der i Alt forekommer 60 Transformationer i den fundne Gruppe, saa at denne altsaa er fuldstændig og ikke Undergruppe i nogen anden Gruppe, der transformerer en ret Linie til sig selv.

Man faar de Transformationer af 2den Orden, som høre til Gruppen, ved i C og D at sætte $p = 0$ i Forbindelse med Transformationerne E. Der er altsaa 15 saadanne Transformationer. Man har

$$\frac{i\sqrt{50 \pm 10\sqrt{5}}}{10}\,\alpha^p - \frac{i\sqrt{50 \pm 10\sqrt{5}}}{10}\,\overline{\alpha}^p = \pm 1,$$

naar for øverste Fortegn paa venstre Side $p = \pm 2$, for nederste Fortegn $p = \pm 1$.

Der findes altsaa 20 Transformationer af 3die Orden, af hvilke de 10 ere Potenser af de andre 10.

Der findes da endnu i Gruppen 25 Transformationer, af hvilke den ene er den identiske. De andre maa da være af 5te Orden. Af saadanne findes der da 24, der ere Potenser af 6 Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter. Det her fundne ses at stemme med S. 56.

IV. De endelige Transformationsgrupper, hvorved et Plan transformeres til sig selv (de endelige Transformationsgrupper for 2 Variable).

28) I de almindelige Bemærkninger, som ere gjorte om endelige Transformationsgrupper, er der ikke taget Hensyn til saadanne Grupper, der indeholde lutter Transformationer, som have 2 eller flere Multiplikatorer lige store. Ved Transformationen af den rette Linie til sig selv forekomme ikke saadanne Transformationer, der have flere Multiplikatorer lige store; men her kunne saadanne Transformationer optræde. Vi kalde saadanne Transformationer perspektiviske.

Enhver Transformation, der transformerer en ret Linie til sig selv, har altid 3 Dobbeltpunkter og 3 Dobbeltlinier. Er det en perspektivisk Transformation, maa dog enhver Linie, der gaar gjennem dens ene Dobbeltpunkt, være en Dobbeltlinie, og ethvert Punkt paa den Linie, der forbinder de 2 andre Dobbeltpunkter, selv være et Dobbeltpunkt. Vi ville kalde det omtalte Dobbeltpunkt og den omtalte Dobbeltlinie Perspektivcentret og Perspektivaxen.

Haves 2 saadanne perspektiviske Transformationer, ville de begge lade den Linie, der forbinder deres Perspektivcentrer og Skjæringspunktet mellem deres Perspektivaxer uforandret.

Lægges Koordinatsystemet saaledes, at den Linie, der forbinder Perspektivcentrene for 2 perspektiviske Transformationer A og B hørende til en Gruppe, er $x = 0$, og at Skjæringspunkterne mellem Perspektivaxerne er $y = 0$, $z = 0$, samt saaledes at A har sit Centrum i $x = 0$, $y = 0$, kunne disse Transformationer skrives

$$A = \begin{cases} \mu x' = a x \\ \mu y' = a y \\ \mu z' = \bar{a}^2 z, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor B har endnu en Multiplikator lig a_1.

Dannes nu Transformationen AB, er denne

$$AB = \begin{cases} \mu x' = a a_1 x \\ \mu y' = a b_2 y + a c_2 z \\ \mu z' = \bar{a}^2 b_3 z + \bar{a}^2 c_3 z. \end{cases}$$

Skal AB atter være perspektivisk, maa man have, enten at

$$\begin{vmatrix} \alpha b_2 - \mu, & \alpha c_2 \\ \bar{\alpha}^2 b_3, & \bar{\alpha}^2 c_3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

har lige Rødder, eller at een af Rødderne er lig med αa_1. I sidste Tilfælde har man, da Multiplikatorerne for B ere a_1, a_1, $\bar{a}_1^2$, for AB αa_1, αa_1, $\bar{\alpha}^2 \bar{a}_1^2$,

$$b_2 + c_3 = a_1 + \bar{a}_1^2,$$

$$\alpha b_2 + \bar{\alpha}^2 c_3 = \alpha a_1 + \bar{\alpha}^2 \bar{a}_1^2,$$

og heraf

$$c_3(\alpha - \bar{\alpha}^2) = \bar{a}_1^2(\alpha - \bar{\alpha}^2),$$

og da α ikke kan være en 3die Rod af Enheden, idet A da var identisk,

$$c_3 = \bar{a}_1^2, \quad b_2 = a_1.$$

Dette vilde medføre, at $c_2 b_3 = 0$, da Determinanten for AB skal være 1, og $a_1 b_2 c_3 = 1$. Da

$$A' = \begin{cases} \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha}^2 z \end{cases} \qquad B' = \begin{cases} \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ere Transformationer, som transformere en ret Linie til sig selv, maa de ved deres Sammensætning danne en endelig Gruppe for den rette Linie. Men da maa $c_2 b_3 = 0$, som medfører, at en af Størrelserne c_2 eller b_3 er 0, ogsaa medføre, at den anden er 0 (se S. 38). Men A og B have da 3 Dobbeltpunkter fælles.

Skulde derimod

$$\begin{vmatrix} \alpha b_2 - \mu, & \alpha c_2 \\ \bar{\alpha}^2 b_3, & \bar{\alpha}^2 c_3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

have lige Rødder, maa man have, da

$$\begin{vmatrix} \alpha b_2 & \alpha c_3 \\ \bar{\alpha}^2 b_3 & \bar{\alpha}^2 c_3 \end{vmatrix} = \bar{\alpha}\bar{a}_1,$$

$$(\alpha b_2 + \bar{\alpha}^2 c_3)^2 = 4\bar{a}_1\bar{\alpha},$$

eller man maa have

$$|\alpha b_2 + \bar{\alpha}^2 c_3| = 2,$$

men dette er kun muligt, da Modulus af en Sum i det højeste er lig Summen af Addendernes Modulus, naar

$$|\alpha b_2| = 1, \quad |\bar{\alpha}^2 c_3| = 1,$$

idet vi atter tage Hensyn til at A' og B' skulde være Transformationer hørende til en endelig Gruppe for $x = 0$.

Men da haves $|b_2| = 1$, $|c_3| = 1$, hvorved vi atter føres til at $b_3 = c_2 = 0$, saa at A og B begge maa have de samme 3 Dobbeltpunkter.

Skal altsaa ikke alle Transformationer i Gruppen have de samme 3 Dobbeltpunkter, maa den indeholde Transformationer, der ikke ere perspektiviske, og vi se da, at vi paa Grupper, hvis Transformationer transformere et Plan til sig selv, kunne anvende de Sætninger, som i Afsnit I og II ere udviklede om Transformationernes Form.

29) Vi skulle dernæst til at undersøge, hvorvidt der kan være endelige Grupper, hvori Transformationerne kunne have Elementer i Transformationsdeterminanten, der ere 0, uden at den tilsvarende Underdeterminant er 0, idet vi have transformeret én af Gruppens Transformationer til Formen

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z. \end{cases}$$

En saadan Transformation maa have Formen

$$B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = \qquad\quad b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = \qquad\quad b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor b_1 og c_1 ikke begge ere 0, eller

$$B' = \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor a_2 og a_3 ikke begge ere 0.

Vi skulle vise, at der ikke gives saadanne Grupper, og behøve kun at vise, at Gruppen ikke kan indeholde Transformationer af Formen B, idet B transformerer rette Linier ved en Transformation af Formen B', d. v. s. Liniekoordinaterne transformeres ved en Transformation af denne Form.

Vi kunne desuden antage, at A ikke er perspektivisk, idet Gruppen maa indeholde ikke perspektiviske Transformationer, hvis ikke alle dens Transformationer ere af Formen A. A er da mindst af 3die Orden. A og B have et fælles Dobbeltpunkt, $y = z = 0$, svarende til Multiplikatorerne α og a_1, medens de til disse Multiplikatorer svarende Dobbeltlinier L og L_1 ikke ere fælles for A og B.

Danne vi nu Transformationen $A^{-1}BAB^{-1}$, se vi, at denne Transformation ikke kan være identisk; thi den flytter den Linie, der ved B forandres til L. Ikke heller kan den have Dobbeltlinien L_1. Det første Element i $A^{-1}BAB^{-1}$'s Transformationsdeterminant er 1, og denne faar altsaa Formen

$$C = \begin{cases} \mu x' = x + p_1 y + q_1 z \\ \mu y' = \qquad\; p_2 y + q_2 z \\ \mu z' = \qquad\; p_3 y + q_3 z, \end{cases}$$

hvor p_1 og q_1 ikke begge ere 0.

Vi kunne desuden antage, at C ikke er perspektivisk; thi da én af dens Multiplikatorer er én, maatte de 2 andre da være -1, og man maatte da have $p_2 = q_3 = -1$, $q_2 = p_3 = 0$, da

$$\begin{aligned} \mu y' &= \beta y \\ \mu z' &= \gamma z \end{aligned} \quad \text{og} \quad \begin{aligned} \mu y' &= p_2 y + q_2 z \\ \mu z' &= p_3 y + q_3 z \end{aligned}$$

ved Sammensætning maatte danne en endelig Gruppe, der transformerede $x = 0$ til sig selv.

Man havde da

$$C = \begin{vmatrix} 1 & p_1 & q_1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{og} \quad CAC^{-1}A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & p_1(\alpha\bar{\beta}-1) & q_1(\alpha\bar{\gamma}-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

eller

$$CAC^{-1}A^{-1} = \begin{cases} \mu x' = x + p_1(\alpha\bar{\beta}-1)y + q_1(\alpha\bar{\gamma}-1)z \\ \mu y' = y \\ \mu z' = z, \end{cases}$$

en Transformation, hvoraf ingen Potens bliver identisk.

C kan altsaa ikke være en perspektivisk Transformation, og danne vi ACA^{-1}, faa vi en ny Transformation, som har et Dobbeltpunkt fælles med C, uden at have den Dobbeltlinie, som ikke gaar gjennem dette Dobbeltpunkt, fælles med A.

Lægge vi nu vort Koordinatsystem saaledes, at C's Dobbeltpunkter ere $x = y = 0$, $x = z = 0$, $y = z = 0$ og saa at $y = z = 0$ svarer til Multiplikatoren 1, faa vi, at de to Transformationer C og $ACA^{-1} = D$ have Formen

$$C = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \quad \text{og} \quad D = \begin{cases} \mu x' = x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

som have de samme Multiplikatorer.

Skulle C og D høre til en endelig Gruppe maa

$$C' = \begin{cases} \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \quad \text{og} \quad D' = \begin{cases} \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ved Sammensætning danne en endelig Transformationsgruppe, der transformerer en ret Linie til sig selv.

D' kan ikke være en Potens af C'. Da D' og C' nemlig have samme Multiplikatorer, maatte den være identisk med eller den omvendte Transformation af C', og da ville DC^{-1} eller DC være en Transformation af Formen

$$\begin{aligned} \mu x' &= x + py + qz \\ \mu y' &= y \\ \mu z' &= z, \end{aligned}$$

hvor p og q ikke begge ere 0; men en saadan Transformation kan ikke forekomme i en endelig Gruppe.

Er D' nu ikke en Potens af C' maa der til Gruppen, dannet ved D' og C', høre en Transformation af 2den Orden hvis Multiplikatorer er i og $-i$, der vil da til den oprindelige Gruppe høre en Transformation, hvis Multiplikatorer ere $1, i, -i$ og hvis anden Potens er

$$E = \begin{cases} \mu x' = x + py + qz \\ \mu y' = \quad -y \\ \mu z' = \qquad -z. \end{cases}$$

Her ere muligvis p og $q = 0$. I saa Tilfælde danner man

$$EDED^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -b_2 & -c_2 \\ 0 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & A_2 & A_3 \\ 0 & -\overline{b}_2 & -\overline{b}_3 \\ 0 & -\overline{c}_2 & -\overline{c}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2A_2 & 2A_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

hvor A_2 og A_3 ere Underdeterminanterne til Leddene 0, 0 i første Søjle af D og ikke begge kunne være 0.

Men da kan $EDED^{-1}$ ikke høre til en endelig Gruppe.

Ere derimod p og q ikke begge 0, kan man danne

$$ECEC^{-1} = \begin{cases} \mu x' = x + p(1 - \overline{\alpha})y + q(1 - \alpha)z \\ \mu y' = y \\ \mu z' = z, \end{cases}$$

en Transformation, som heller ikke kan forekomme i en endelig Gruppe.

Som Resultat af alle disse Undersøgelser faas altsaa:

Naar en Transformation skal høre til en endelig Transformationsgruppe for Planen, og denne Gruppe indeholder en Transformation af Formen

$$\left.\begin{aligned} \underline{\mu x' = \alpha x} \\ \underline{\mu y' = \beta y} \\ \underline{\mu z' = \gamma z}, \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

maa altid samtidig et Element i Transformationsdeterminanten for en vilkaarlig Transformation i Gruppen og dette Elements Underdeterminant være Nul.

30) Vi ville nu nærmere undersøge Formen af Transformationerne i saadanne Grupper, som vi her undersøge, idet vi antage, at Gruppen ikke indeholder lutter Transformationer, der have 3 Dobbeltpunkter fælles.

Vi antage stadigt, at Gruppen indeholder en Transformation, der ikke er perspektivisk, med Dobbeltpunkter i Begyndelsespunkterne af Koordinatsystemet. Idet vi stadigt skrive Transformationsdeterminanterne for selve Transformationerne, vil, ifølge 14) og 29), i enhver Transformation

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{69}$$

henhørende til Gruppen, ethvert Element være konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn.

Dens Multiplikatorer ere bestemte ved Ligningen

$$\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (A_1 + B_2 + C_3)\mu - 1 = 0. \tag{70}$$

$a_1 + b_2 + c_3$ kaldes Transformationens Diagonalsum, og det ses af (70), at en Transformations Multiplikatorer ere bestemte ved dens Diagonalsum, naar den hører til en endelig Gruppe, thi

$$a_1 + b_2 + c_3 = \overline{A}_1 + \overline{B}_2 + \overline{C}_3,$$

saa at 2 Transformationer, der have samme Diagonalsum ogsaa have samme Multiplikatorer.

Transformationens Dobbeltpunkter ere bestemte ved

$$\begin{aligned} (a_1 - \mu)x + b_1 y + c_1 z &= 0 \\ a_2 x + (b_2 - \mu)y + c_2 z &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + (c_3 - \mu)z &= 0, \end{aligned}$$

idet μ er en Rod i (70).

Man har da Koordinaterne x, y, z til Dobbeltpunkterne bestemt ved

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_3 - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_1 - (b_2 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_3} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_2 - (a_1 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_3} \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

De 3 Ligninger skulle ved Indsættelse af μ's Værdier blive identiske, men opstilles her for det følgendes Skyld, idet vi i det følgende ville se, hvor mange Betingelser a_1, b_1, c_1 o. s. v. ere underkastede.

31) Vi ville nu først vise, at i en Transformation henhørende til en endelig Gruppe ethvert Element er konjugeret med sin Underdeterminant, stadigt under de samme Forudsætninger som i 30).

Vi have allerede omtalt, at ethvert Element maa være konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn. Ifølge 14) maa nu alle Elementer i en Række enten være konjugerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn, som de tilsvarende Elementer i en anden Række, eller alle være konjugerede med deres Underdeterminanter med modsat Fortegn af, hvad der gjælder for en anden Række.

Elementerne i Diagonalrækken ere altid konjugerede med deres Underdeterminanter med positivt Fortegn. Endelig ere 2 Elementer, der ligge symmetrisk m. H. t. Diagonalrækken, konjugerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn.

Er nu

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

en Transformation i Gruppen, og findes der Elementer, som ere konjugerede med deres Underdeterminanter med negativt Fortegn, saa maa der findes Rækker, hvor der forekommer 2 saadanne Elementer.

Vi kunne antage, at den øverste Række er en saadan, saa faa vi

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 - |c_1|^2 = 1,$$

og altsaa

$$|a_1|^2 > 1,$$

idet vi forudsætte, at b_1 og c_1 ikke ere 0 [1]).

Lad nu en anden Transformation hørende til Gruppen være

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \qquad \alpha\beta\gamma = 1, \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$$

saa kunne vi danne Transformationen

$$A^m B A^{-m} B^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha^m a_1, & \alpha^m b_1, & \alpha^m c_1 \\ \beta^m a_2, & \beta^m b_2, & \beta^m c_2 \\ \gamma^m a_3, & \gamma^m b_3, & \gamma^m c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\alpha}^m A_1, & \bar{\alpha}^m A_2, & \bar{\alpha}^m A_3 \\ \bar{\beta}^m B_1, & \bar{\beta}^m B_2, & \bar{\beta}^m B_3 \\ \bar{\gamma}^m C_1, & \bar{\gamma}^m C_2, & \bar{\gamma}^m C_3 \end{vmatrix}.$$

Det første Element her er

$$|a_1|^2 - \alpha^m \bar{\beta}^m |b_1|^2 - \alpha^m \bar{\gamma}^m |c_1|^2.$$

Sætte vi nu

$$\alpha = \cos t + i \sin t$$
$$\beta = \cos u + i \sin u$$
$$\gamma = \cos v + i \sin v,$$

saa er den reelle Del af denne Størrelse

$$a = |a_1|^2 - \cos m(t-u)\,|b_1|^2 - \cos m(t-v)\,|c_1|^2;$$

---

[1]) Omvendt ere b_1 og c_1 ikke begge 0, hvis $|a_1|^2 > 1$.

hvor t, u, v staa i et rationalt Forhold til 2π. Vi skulle nu vise, at vi i ethvert Tilfælde kunne vælge m saaledes, at $a > |a_1|^2$.

Vi sætte

$$t = \frac{k_1}{n} 2\pi, \quad u = \frac{k_2}{n} 2\pi, \quad v = \frac{k_3}{n} 2\pi,$$

hvor k_1, k_2, k_3 ere hele Tal. Sættes endvidere $k_1 - k_2 = k$, $k_1 - k_3 = l$, er

$$a = |a_1|^2 - \cos\frac{mk}{n} 2\pi \,.\, |b_1|^2 - \cos\frac{ml}{n} 2\pi \,.\, |c_1|^2.$$

Vi forudsætte, at A ikke er perspektivisk. Da kunne hverken $k_1 - k_2$ eller $k_1 - k_3$ være 0, ligesom k og l ikke kunne være lige store.

Man kan nu have:

1) $k = -l$, $\cos\frac{mk}{n} 2\pi = \cos\frac{ml}{n} 2\pi$, og kan da altid bestemme m saaledes, at $\cos\frac{ml}{n} 2\pi$ bliver negativ, i hvilket Tilfælde $a > |a_1|^2$.

2) $\frac{k}{n}$ og $\frac{l}{n}$ ere uforkortelige Brøker og k ikke lig $-l$.

Vi antage $|b_1|^2 > |c_1|^2$ og bestemme m saaledes, at $\cos\frac{mk}{n} 2\pi$ faar sin numerisk største negative Værdi, i hvilket Tilfælde vi altid have

$$\cos\frac{mk}{n} 2\pi \leqq \cos\frac{ml}{n} 2\pi,$$

da denne største Værdi for $\frac{mk}{n} 2\pi$ er -1 for n-lige, $-\cos\frac{\pi}{n}$ for n-ulige, medens den største Værdi, $\cos\frac{ml}{n} 2\pi$ da kan have, er $\cos\frac{2\pi}{n}$, saa at $a > |a_1|^2$.

3) Man kan endelig have, at $\frac{k}{n}$ og $\frac{l}{n}$ kunne forkortes til $\frac{k_1}{n_1}$ og $\frac{l_1}{n_2}$, hvori det gjerne kan antages, at n_1 og n_2 ere indbyrdes primiske Tal, hvis den ene af disse Størrelser ikke er et Multiplum af den anden, idet hvis n_1 og n_2 ikke vare det, et Multiplum $\frac{m_1 k_1}{n_1}$ og $\frac{m_1 l_1}{n_2}$ kunde forkortes til Brøker, hvis Nævnere vare saadanne Tal. Vi kunne da bestemme m saaledes, at $\frac{mk_1}{n_1} 2\pi$ fik en Værdi mellem $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{mk_1}{n_1} 2\pi$ vil da kunne skaffes en lignende Værdi, naar m erstattes ved $m_1 = y \,.\, n_1 + m$, hvor y er et helt Tal, og vi bestemme y ved at

$$(yn_1 + m) l_1 \equiv l_2 \pmod{n_2},$$

saaledes, at $\frac{l_2}{n_2} 2\pi$ ligeledes faar en Værdi mellem $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$; det ses, at denne sidste Kongruens altid er mulig, da $l_1 n_1$ og n_2 ere primiske.

Gaar n_2 op i n_1, kan man paa samme Maade som i 2) sørge for, at $\cos\frac{mk_1}{n_1}$ er negativ og numerisk større end $\cos\frac{ml_1}{n_2}$.

Er n_2 et Multiplum af n_1 og er $n_2 = m_1 n_1$, m_1 indbyrdes primisk med n_1, kan man ogsaa ved at erstatte k_1 og l_1 ved $m_1 k_1$ og $m_1 l_1$ reducere Tilfældet til 2). Kun hvis dette ikke er Tilfældet, kan der opstaa Vanskeligheder. Det ses let, at vi kun behøve at undersøge det Tilfælde, hvor $n_2 = n_1^p$. Vi kunne da altid bestemme m saaledes, at $\frac{mk_1}{n_1} 2\pi$ bliver en Vinkel mellem $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$, og idet vi erstatte m ved $m + 2yn_1$, skulle vi nu bestemme y saaledes, at $\frac{(m + 2n_1 y) l_1}{n_1^p}$ bliver en Vinkel, ligeledes beliggende mellem $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$; men dette ses let at være opnaaeligt. Er nemlig $\frac{l_2}{n_1^p} 2\pi$ en saadan Vinkel, kan man altid tillægge l_2 mindst n_1 forskjellige Værdier, og altsaa bestemme y saaledes, at

$$(m + 2n_1 y) l_1 \equiv l_2 \mod (n_1^p),$$

da denne Kongruens, for at være mulig, kun kræver

$$ml_1 \equiv l_2 \mod (n_1).$$

Det er saaledes vist, at man, naar b_1 og c_1 ikke begge ere 0, altid kan bestemme m saaledes, at $a > |a_1|^2$, hvor $|a_1|^2$ igjen er større end den reelle Del af a_1.

Gruppen kan da ikke være endelig; thi i saa Tilfælde maatte der være en Transformation i Gruppen, for hvilken den reelle Del af a_1 havde sin største Værdi.

Ere b_1 og c_1 begge Nul, ville a_2 og a_3 ogsaa være Nul, da A_2 og A_3 ere Nul; men i saa Tilfælde ses det, at alle Elementerne for B ville være konjugerede med deres Underdeterminanter, da

$$A' = \begin{cases} \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases} \qquad B' = \begin{cases} \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

maa høre til en endelig Transformationsgruppe for en ret Linie.

Vi have da i alle Tilfælde vist:

Naar en Transformationsgruppe, hvor Transformationerne transformere et Plan til sig selv, er endelig, maa den kunne transformeres saaledes, at i enhver Transformationsdeterminant hørende til Gruppen, ethvert Element er konjugeret med sin Underdeterminant. . . . . (72)

32) Vi ville nu gaa nøjere ind paa, hvilke af de Betingelser, Transformationsdeterminantens Elementer ere underkastede paa Grund af (72), der ere uafhængige og hvilke der er en Følge af de andre. Lad os antage, at Gruppen (eller en Undergruppe) er bestemt ved at skulle indeholde

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases}$$

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

De første Betingelser, vi fik, vare, at a_1, b_2, c_3 skulle være konjugerede med deres Underdeterminanter. Disse Betingelser ere øjensynligt uafhængige af hinanden. Derimod ere en Del af de øvrige Betingelser en Følge heraf, eller vi ville endogsaa vise, at have vi valgt a_1, b_2, c_3, og ere disse konjugerede med deres Underdeterminanter, er herved givet, om Betingelserne (72) ere mulige eller ej.

Til Bestemmelse af Dobbeltpunkterne havde vi Ligningerne

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_3+\mu^{\frac{1}{2}}c_1}&=\frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_3+\mu^{\frac{1}{2}}c_2}=\frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_3-(a_1+b_2)\mu^{\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_1-(b_2+c_3)\mu^{\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{3}{2}}}&=\frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_1+\mu^{\frac{1}{2}}a_2}=\frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_1+\mu^{\frac{1}{2}}a_3}\\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_2+\mu^{\frac{1}{2}}b_1}&=\frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_2-(a_1+c_3)\mu^{\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{3}{2}}}=\frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_2+\mu^{\frac{1}{2}}b_3},\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

hvor μ er én af Multiplikatorerne.

Nu have vi

$$\mu^3-(a_1+b_2+c_3)\mu_2+(\bar{a}_1+\bar{b}_2+\bar{c}_3)\mu-1=0,$$

og altsaa

$$\mu^{\frac{3}{2}}-(a_1+b_2)\mu^{\frac{1}{2}}+\mu^{-\frac{1}{2}}C_3=\mu^{-\frac{3}{2}}-(A_1+B_2)\mu^{-\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{1}{2}}c_3,$$

og, idet vi forudsætte, at μ er en Rod af Enheden, ere altsaa Størrelserne paa begge Sider af Lighedstegnet sin egen konjugerede Størrelse, og ere altsaa reelle. Man ser altsaa, at alle de treleddede Størrelser i Nævnerne ere reelle.

Multipliceres nu i de 2 første Ligninger første og sidste Forhold med hinanden, faas

$$\left(\mu^{-\frac{1}{2}}A_3+\mu^{\frac{1}{2}}c_1\right)\left(\mu^{-\frac{1}{2}}C_1+\mu^{\frac{1}{2}}a_3\right)=\text{Reel}. \quad (73)$$

Man har desuden

$$b_2=\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_3 & C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{a}_1 & \bar{c}_1\\ \bar{a}_3 & \bar{c}_3\end{vmatrix},$$

og da $\bar{a}_1\bar{c}_3=A_1C_3$, haves altsaa ogsaa

$$A_3C_1=\bar{a}_3\bar{c}_1 \quad (74)$$

og de andre analoge Ligninger.

Udføres nu Multiplikationen i (73) faas

$$\mu^{-1}A_3C_1+\mu a_3c_1+c_1C_1+a_3A_3=\text{Reel},$$

og da efter (74) $\mu^{-1}A_3C_1+\mu a_3c_1$, er Reel, haves altsaa ogsaa

$$c_1C_1+a_3A_3=\text{Reel}. \quad (75)$$

Men nu er

$$c_1C_1a_3A_3=\text{Reel (positiv)},$$

da $c_1a_3=\overline{C_1A_3}$, og altsaa er enten c_1C_1 og a_3A_3 reelle, eller c_1C_1 og a_3A_3 konjugerede imaginære Størrelser.

Finder det første Sted, er altsaa $c_1 C_1$ reel, er dette i og for sig tilstrækkeligt til, at Transformationen kan bringes paa den i (72) omtalte Form for Transformationer, hørende til en endelig Gruppe, hvis $|a_1|\,|b_2|\,|c_3|$ alle tre ere mindre end 1, og a_1, b_2, c_3 ere konjugerede med deres Underdeterminanter, og idet vi forudsætte, at ethvert Element i Determinanten og dets Underdeterminant ere Nul paa samme Tid.

Thi er $c_1 C_1$ reel, maa man ogsaa have $b_1 B_1$ reel, da

$$|a_1|^2 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = 1.$$

Paa samme Maade ses, at Produktet af ethvert Element og dets Underdeterminant ere reelle Størrelser. Tillige maa disse Produkter alle blive positive. Thi $b_1 B_1$ og $c_1 C_1$ kunne ikke begge være negative, da $|a_1|$ saa var større end 1. Lad os da antage $b_1 B_1$ negativ, $c_1 C_1$ positiv, da er $a_3 A_3$ ogsaa positiv; thi $c_1 C_1 a_3 A_3$ er en positiv Størrelse. Transformeres nu Gruppen, saa at Transformationen A bliver uforandret og $|c_1| = |C_1|$, bliver ogsaa $|a_3| = |A_3|$.

Men da ere alle Elementerne i Diagonalrækken $c_1 b_2 a_3$ konjugerede med deres Underdeterminanter, og ligesom vi før, paa Grundlag af denne Egenskab, ved $a_1 b_2 c_3$ fik $a_3 c_1 = \overline{A_3 C_1}$, faa vi nu $b_1 c_2 = \overline{B_1 C_2}$, $b_1 c_2 B_1 C_2$ positiv; er altsaa $b_1 B_1$ negativ, maa $c_2 C_2$ ogsaa være det, og da $b_1 B_1 a_2 A_2$ er positiv, maa $a_2 A_2$ ogsaa være negativ; men dette er umuligt, da

$$a_2 A_2 + |b_2|^2 + c_2 C_2 = 1,$$

hvoraf vilde følge $|b_2| > 1$.

Altsaa er Produktet af ethvert Element og dets Underdeterminant positiv.

Transformeres nu, saa at

$$|b_1| = |B_1|, \quad |c_1| = |C_1|,$$

faas

$$b_1 = \overline{B_1}, \quad c_1 = \overline{C_1}$$

og heraf

$$a_2 = \overline{A_2}, \quad a_3 = \overline{A_3},$$

og da alle Elementer i Diagonalrækken $c_1 b_2 a_3$ ere konjugerede med deres Underdeterminanter

$$b_1 c_2 = \overline{B_1 C_2}$$

og heraf

$$c_2 = \overline{C_2}, \quad b_3 = \overline{B_3}.$$

Var $c_1 C_1$ ikke reel, kunde Transformationen ikke høre til en endelig Gruppe. Det kan vises, at i saa Tilfælde kan Gruppen transformeres, saa at baade Transformationerne A og B faa reelle Dobbeltpunkter.

Skal baade A og B have reelle Dobbeltpunkter og høre til en endelig Gruppe, kan det vises, at Dobbeltpunkterne for A og B ligge paa samme Keglesnit.

Vi skulle nu vise, hvorledes man kan beregne $c_1 C_1$, naar a_1, b_2, c_3 ere givne.

Da $a_1 = \overline{A}_1$ o. s. v., har man

$$b_1 a_2 = a_1 b_2 - \overline{c_3}$$
$$c_1 a_3 = a_1 c_3 - \overline{b_2}$$
$$c_2 b_3 = b_2 c_3 - \overline{a_1}$$

og da $D = 1$,

$$b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 = 1 - |a_1|^2 - |b_2|^2 - |c_3|^2 + 2 a_1 b_2 c_3.$$

Ved Multiplikation af de 3 første Ligninger faas

$$b_1 c_2 a_3 \,.\, c_1 a_2 b_3 = a_1^2 b_2^2 c_3^2 - \overline{a_1} \overline{b_2} \overline{c_3} + |a_1^2 b_2^2| + |a_1^2 c_3^2| + |b_2^2 c_3^2| - a_1 b_2 c_3 \left[|a_1|^2 + |b_2|^2 + |c_3|^2 \right].$$

Man faar da

$$\left.\begin{matrix} b_1 c_2 a_3 \\ c_1 a_2 b_3 \end{matrix}\right\} = \frac{1 - |a_1|^2 - |b_2|^2 - |c_3|^2 + 2 a_1 b_2 c_3}{2}$$

$$\pm \frac{\sqrt{1 + |a_1|^4 + |b_2|^4 + |c_3|^4 + 4(a_1 b_2 c_3 + \overline{a_1} \overline{b_2} \overline{c_3}) - 2(|a_1|^2 + |b_2|^2 + |c_3|^2 + |a_1^2 b_2^2| + |a_1^2 c_3^2| + |b_2^2 c_3^2|)}}{2},$$

hvor Størrelsen under Rodtegnet er reel.

Vi betegne Rodstørrelsen med R.

Man har

$$c_1 C_1 = c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 = c_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 c_3 + |b_2|^2 = \frac{1 - |a_1|^2 + |b_2|^2 - |c_3|^2 \pm R}{2},$$

Altsaa er $c_1 C_1$ reel, hvis Rodstørrelsen er det, og Transformationen kan altsaa bringes paa Formen (72), hvis R er en reel Størrelse [1]).

33) Vi ville nu, paa lignende Maade, som det er gjort for de endelige Transformationsgrupper for den rette Linie, undersøge de mulige endelige Transformationsgrupper for Planen.

Vi ville først undersøge Sammensætningen af to Transformationer, der have de samme Dobbeltpunkter. Lad os antage, at en saadan Transformation er

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z. \end{cases}$$

Lad os antage, at A er af Ordenen

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots,$$

hvor $p_1, p_2 \ldots$ ere Primtal, $a_1, a_2 \ldots$ hele Tal, saa vil $A^{p_2^{a_2} p_3^{a_3}} \ldots$ være af Ordenen $p_1^{a_1}$,

---

[1]) For at Ligningen $\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (\overline{a_1} + \overline{b_2} + \overline{c_3})\mu - 1 = 0$ skal have Rødder, hvis Modulus er 1, kræves visse Ulighedsbetingelser mellem a_1, b_2, c_3. Saaledes er det nødvendigt, men ikke tilstrækkeligt, at $|a_1 + b_2 + c_3| < 3$. En af Rødderne i Ligningen har altid Modulus 1. Have ikke alle Rødderne Modulus 1, ere de to af dem $d\alpha$, $\frac{1}{d}\alpha$, den 3die $\overline{\alpha^2}$, hvor $|\alpha| = 1$, $d > 1$.

og det ses let, at A kan erstattes ved forskjellige Transformationer af Ordenerne $p_1^{a_1}$, $p_2^{a_2}\dots$ med A's Dobbeltpunkter som Dobbeltpunkter, medens omvendt disse Transformationer kunne betragtes som Potenser af A.

Der er derfor kun Grund til at betragte Sammensætningen af 2 Transformationer A og B med samme Dobbeltpunkter, hvoraf denne ene er af Ordenen p^a, den anden af Ordenen p^b, hvor vi antage $a \geqq b$, og tilmed kunne antage, at B ikke er en Potens af A.

Vi ville navnlig se, hvor mange forskjellige Transformationer vi kunne faa ved Sammensætning af A og B. Lad os da se, hvor naar vi kunne have

$$A^m B^n \equiv A^{m_1} B^{n_1}.$$

Man maa da have

$$A^{m-m_1} \equiv B^{n_1-n}.$$

Er nu

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha_1 x \\ \mu y' = \beta_1 y \\ \mu z' = \gamma_1 z, \end{cases}$$

kræver dette, at

$$\begin{aligned} \alpha^{m-m_1} &= \alpha_1^{n-n_1} \,.\, a^q \\ \beta^{m-m_1} &= \beta_1^{n-n_1} \,.\, a^q \quad \text{hvor } a = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \\ \gamma^{m-m_1} &= \gamma_1^{n-n_1} \,.\, a^q \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha^{\frac{m-m_1}{n-n_1}} \,.\, a^{\frac{-q}{n-n_1}} \\ \beta_1 &= \beta^{\frac{m-m_1}{n-n_1}} \,.\, a^{\frac{-q}{n-n_2}} \\ \gamma_1 &= \gamma^{\frac{m-m_1}{n-n_1}} \,.\, a^{\frac{-q}{n-n_1}}. \end{aligned}$$

Er nu p ikke 3, ses det, at vi kunne antage $q = 0$. Multiplikatorerne α, β, γ (eller nogle af dem), maa da være p^ade primiske Rødder af Enheden, og α_1, β_1, γ_1, p^bde primiske Rødder af Enheden. $\dfrac{m-m_1}{n-n_1}$ maa da være lig p^{a-b}, og vi kunne sætte

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha' \,.\, \alpha^{p^{(a-b)}} \\ \beta_1 &= \beta' \,.\, \beta^{p^{(a-b)}} \\ \gamma_1 &= \gamma' \,.\, \gamma^{p^{(a-b)}}, \end{aligned}$$

hvor α', β', γ' ere $(n-n_1)$te Rødder af Enheden og $n-n_1 < p^b$. Vi have da

$$B \equiv B' A^{p^{(a-b)}},$$

hvor B' er en Transformation af i det højeste $(n-n_1)$te Orden, og vi se, at vi faa den samme Gruppe ved Sammensætning af A og B' som ved Sammensætning af A og B, saa at vi gjerne kunne erstatte B med B'.

Ganske paa samme Maade kan imidlertid gaas frem, naar $p = 3$, undtagen at q da ikke altid kan sættes lig 0, og at Multiplikatorerne α, β, γ kunne være primitive Rødder af Enheden af Ordenen p^{a+1} eller p^{b+1}.

Som Resultat af disse Undersøgelser ses da, at vi kunne forudsætte B saaledes valgt, at ingen Potens af A er lig en Potens af B.

Er dette Tilfældet, og er B af Ordenen p^b, ville A og B ved Sammensætning give Oprindelse til p^{a+b} Transformationer. Specielt ses det, at der iblandt disse Transformationer ville findes alle mulige Transformationer med de givne Dobbeltpunkter af Ordenen p^b, idet der af denne Orden og lavere Orden vil blive p^{2b} Transformationer.

Vide vi om en Gruppe af Transformationer, hvor alle Transformationerne have samme Dobbeltpunkter, at den indeholder Transformationerne A, B, C af Ordenen p^a, p^b, p^c, hvor $a \geqq b \geqq c$, og B ikke ved at multipliceres med en Potens af A kan reduceres til en Transformation af lavere Orden, vil man have den samme Gruppe dannet ved at multiplicere Potenser af A og B, som ved at multiplicere Potenser af A, B og C, saa at C ikke er nødvendig til Dannelse af Gruppen.

Vi se saaledes, at, naar alle Transformationer i en Gruppe have samme Dobbeltpunkter, behøve vi kun at kjende 2 af dens Transformationer for at kunne danne Gruppen, i Fald ikke alle Transformationer i Gruppen ere Potenser af samme Transformation.

Kaldes de omtalte Transformationer A og B, og er Transformationen af højeste Orden hørende til Gruppen af Ordenen $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots$, hvor p_1, p_2 o. s. v. ere Primtal, skal B være af Ordenen $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots$, den højeste Orden af en Transformation i Gruppen, der ikke ved Multiplikation med en Potens af A kan reduceres til lavere Orden. Gruppen vil da indeholde $p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} \ldots$ Transformationer, den identiske Transformation mediberegnet.

34) Vi ville dernæst undersøge, hvorledes en Gruppe er beskaffen, der indeholder perspektiviske Transformationer, specielt saadanne Grupper, der indeholde perspektiviske Transformationer af højere end anden Orden.

Vi ville begynde med at undersøge saadanne Grupper, der indeholde en perspektivisk Transformation af 6te eller højere Orden.

Lad os antage, at denne Transformation er

$$A = \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha} x \\ \mu y' = \alpha^2 y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z, \end{cases}$$

og at Transformationerne i Gruppen ikke alle transformere A's Perspektivcentrum og Perspektivaxe til sig selv (i hvilket Tilfælde alle Transformationerne i Gruppen transformere en ret Linie til sig selv, et Tilfælde, som vi ikke nøjere skulle komme ind paa), saa maa der existere endnu en perspektivisk Transformation B i Gruppen, hvor B er af samme Orden som A.

A's Perspektivcentrum er $x = 0$, $z = 0$, dens Axe $y = 0$.

Vi kunne nu antage Koordinatsystemet saaledes valgt, at B's Perspektivcentrum ligger paa $x = 0$, og dens Axe skjærer A's Axe i $y = 0$, $z = 0$, saa vil B's Ligninger være

$$B = \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

A og B transformere da begge Linien $x = 0$ til sig selv. Gruppen dannet ved Sammensætning af A og B maa da indeholde lutter Transformationer, der transformere $x = 0$ til sig selv.

Tillige ses det, at Linien $x = 0$ ved Transformationerne A og B transformeres til sig selv ved Transformationer, der ere af 6te eller højere Orden for denne Linies Vedkommende. Gruppen dannet ved A og B maa da for denne Linies Vedkommende være cyklisk. De Punkter af $x = 0$, som A og B lade uforandrede, maa da falde sammen; men disse ere dels Perspektivcentrene dels de Punkter, hvori Axerne skjære $x = 0$. Perspektivcentret for den ene af disse Transformationer maa da falde paa den andens Axe. Enhver Transformation C i den oprindelig omtalte Gruppe, der altsaa ikke lader A's Perspektivcentrum og Axe uforandret, maa transformere Centret til at falde paa Axen og Axen til at gaa gjennem Centret.

B har Ligningen

$$B = \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = \bar{a} y \\ \mu z' = a^2 z. \end{cases}$$

Gruppen maa da ogsaa, hvis A og B ere af $n$te Orden, indeholde alle Transformationer af $n$te Orden, der have Dobbeltpunkter i Begyndelsespunkterne for Koordinatsystemet.

Der hører da ogsaa til Gruppen en Transformation

$$D = \begin{cases} \mu x' = a^2 x \\ \mu y' = \bar{a} y \\ \mu z' = \bar{a} z \end{cases}$$

med Perspektivaxe i $x = 0$, Perspektivcentrum i $y = 0$, $z = 0$.

En hvilkensomhelst Transformation C hørende til Gruppen, som ikke har Dobbeltpunkter i Begyndelsespunkterne, maa da enten have et Dobbeltpunkt i et af dem og ombytte de andre, eller kredsforskyde dem alle 3.

Lader nemlig C $(y = 0, z = 0)$ uforandret, maa den lade Transformationen D uforandret, og maa altsaa lade $x = 0$ uforandet, og da den skal bringe Centrerne for A og B hen paa den andens Axe, maa C ombytte Punkterne $(x = 0, y = 0)$ og $(x = 0, z = 0)$. Lader C ikke noget af Punkterne $(y = 0, z = 0)$, $(z = 0, x = 0)$, $(x = 0, y = 0)$ uforandret, maa den transformere ($y = 0$, $z = 0$) til et af Punkterne ($y = 0$, $x = 0$) eller ($z = 0$, $x = 0$), da den skal transformere ($y = 0$, $z = 0$), Centret for D, til et Punkt af $x = 0$, D's Axe, og da der ellers vilde være to Transformationer af 6te eller højere Orden, der transformerede $x = 0$ til sig selv, uden at have sammenfaldende Dobbeltpunkter paa $x = 0$, hvad der ikke kan forekomme i en endelig Gruppe. Men transformerer C ($y = 0$, $z = 0$) til ($y = 0$, $x = 0$), uden at lade $y = 0$, uforandret, i hvilket Tilfælde C maatte lade A uforandret og ogsaa Punktet ($x = 0$, $z = 0$), ses det paa lignende Maade, at den maa transformere ($y = 0$, $x = 0$) til ($x = 0$, $z = 0$) og endelig ($x = 0$, $z = 0$) til ($y = 0$, $z = 0$).

Da nu C ikke har noget af sine Dobbeltpunkter fælles med A, maa C^3 være identisk, altsaa C af 3die Orden og ikke perspektivisk.

Vi se da, at naar Gruppen indeholder perspektiviske Transformationer af 6te eller højere Orden, kan den enten bestaa af Transformationer, der alle transformere samme rette Linie til sig selv ved en cyklisk Gruppe, eller af Transformationer, der alle have de samme 3 Dobbeltpunkter, i Forbindelse med Transformationer, der enten have et Dobbeltpunkt af de omtalte 3 og ombytte de to andre eller ere af 3die Orden og kredsforskyde de 3 Dobbeltpunkter.

Saadanne Grupper som de her nævnte kalde vi cykliske Grupper for Planer.

Det er klart nok, at saadanne Grupper existere og at Transformationerne i dem have Ligninger af Formerne

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \mu x' = \alpha x & \mu x' = a x & \mu x' = p y \\ \mu y' = \beta y & \mu y' = b z & \mu y' = q z \\ \mu z' = \gamma z & \mu z' = c y & \mu z' = r x, \end{array}\right\} \quad (76)$$

hvor vi gjerne kunne tænke os Gruppen saaledes transformeret, at alle de indgaaende Størrelser a, b, c o. s. v. ere Rødder af Enheden.

I Stedet for II kan naturligvis optræde de analoge Former, som ombytte x og y, eller x og z.

35) Vi komme nu til at betragte de andre Grupper, som indeholde perspektiviske Transformationer. Vi begynde da med dem, der indeholde perspektiviske Transformationer af 5te Orden. En saadan har Formen.

$$A = \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha} x \\ \mu y' = \alpha^2 y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z, \end{cases}$$

hvor α er en 5te primisk Rod af Enheden. Lad os nu antage, at Gruppen indeholder en Transformation C, som ikke lader A uforandret, saa kan den transformere A til

$$B = \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

idet vi antage Koordinatsystemet saaledes valgt, at $x = 0$ gaar gjennem begge Perspektivcentrerne for A og B, medens Axerne skjære hinanden i $y = 0$, $z = 0$. A og B maa da begge transformere $x = 0$ til sig selv, og Transformationsgruppen for Transformationer dannede ved Sammensætning af A og B maa da for denne Linie være cyklisk eller ikosaedrisk. I sidste Tilfælde vil den indeholde en Transformation, som ombytter de Dobbeltpunkter A har liggende paa $x = 0$, saa at Gruppen ogsaa indeholder en Transformation

$$D = \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = \bar{a} y \\ \mu z' = a^2 z \end{cases}$$

og

$$D A = \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^2 x \\ \mu y' = a y \\ \mu z' = a z. \end{cases}$$

Den Transformation, der ombytter A's Dobbeltpunkter maa have Formen

$$E = \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^p x \\ \mu y' = c_2 z \\ \mu z' = b_3 y \end{cases}$$

hvor $c_2 b_3 = -a^p$.

Man har da

$$E^2 = \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^{2p} x \\ \mu y' = -a^p y \\ \mu z' = -a^p z \end{cases}$$

og

$$E^{10} = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

og endelig

$$E^{10} D A = \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^2 x \\ \mu y' = -a y \\ \mu z' = -a z, \end{cases}$$

som er en perspektivisk Transformation af 10de Orden.

Efter det foregaaende maa da enten alle Transformationer i Gruppen transformere samme Linie til sig selv, eller ogsaa maa Gruppen være cyklisk. Da dette sidste ikke kan være Tilfældet, hvis $x = 0$ ikke transformeres til sig selv ved en cyklisk Gruppe, dannet ved Sammensætning af A og B, maa den altsaa i dette Tilfælde bestaa af lutter

Transformationer, der transformere $x = 0$ til sig selv ved en ikosaedrisk Transformationsgruppe.

Aldeles lignende Bemærkninger kunne gjøres, hvis A og B ere perspektiviske Transformationer af 3die Orden og transformere $x = 0$ til sig selv ved en Ikosaedergruppe eller en Oktaedergruppe.

36) Vi gaa derpaa over til at betragte Grupper, som indeholde perspektiviske Transformationer af 4de Orden. Vi antage ligesom før, at Gruppen indeholder en Transformation C, der ikke transformerer Centret for en perspektivisk Transformation hørende til Gruppen til sig selv, og at den altsaa maa indeholde 2 perspektiviske Transformationer af 4de Orden A og B, som vi kunne tænke os bragte paa Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = iz \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Hvis A ved Transformation ved de øvrige Transformationer i Gruppen kun transformeres til andre perspektiviske Transformationer, saaledes at Forbindelseslinierne mellem A's Centrum og de øvrige Transformationers Centrum kan transformeres til sig selv ved cykliske Grupper, faas kun Grupper af samme Art som de i 34) omtalte.

Vi antage da her, at A og B transformere $x = 0$ til sig selv, idet de give Oprindelse til en Gruppe, der for denne Linies Vedkommende er oktaedrisk. Gruppen maa da ligesom før ogsaa indeholde en Transformation, der ombytter A's Dobbeltpunkter, og maa da ogsaa indeholde Transformationerne

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = iy \\ \mu z' = -z \end{cases} \quad \text{og} \quad D \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = iy \\ \mu z' = iz. \end{cases}$$

Det ses da, at naar 2 Perspektivaxer for 2 Transformationer af 4de Orden skjære hinanden, vil deres Skjæringspunkt være Centrum for en perspektivisk Transformation, hvis Axe er den Linie, der forbinder de to første Transformationers Centra. Altsaa vil Axen for enhver perspektivisk Transformation af 4de Orden transformeres til sig selv ved en Transformation af 4de Orden, der har et Dobbeltpunkt i Axens Skjæringspunkt med Axen for en anden Transformation af samme Art, et andet Dobbelpunkt i sin Skjæring med Forbindelseslinien mellem de 2 Transformationers Centra.

Lad os nu antage, at P og p, Q og q ere henholdsvis Centra for og Axer for de 2 Transformationer A og B, og at Gruppen indeholder en Transformation T, der transformerer P og p henholdsvis til Q og q, og at T ikke har noget Dobbeltpunkt fælles med A eller B. Linien PQ vil da, hvis Gruppen er endelig, kunne antages at transformeres til sig selv ved en Oktaedergruppe.

En saadan indeholder som bekjendt, se p. 56, 3 Transformationer af 4de Orden med forskjellige Dobbeltpunkter. Vi antage, at p og q skjære PQ i P_1 og Q_1, saa er P, Q, P_1, Q_1 de 4 Dobbeltpunkter for saadanne Transformationer af Linien. Der maa altsaa være endnu et Par saadanne Dobbeltpunkter S og S_1.

Vi kalde Skjæringspunktet mellem p og q R.

Da der nu er Transformationer i Gruppen for den rette Linie, der ombytte saa vel Punkterne PP_1 indbyrdes som Punktparrene PP_1 med QQ_1 eller SS_1, maa der gives Transformationer, fremkomne ved Sammensætning af A og B, der ere perspektiviske og have deres Axer gaaende gjennem R og Punkterne P, Q, S, P_1, Q_1, S_1 medens deres Centra ere P_1, Q_1, S_1, P, Q, S.

Da nu PQ selv er Axe for en perspektivisk Transformation, maa T og dens Potenser altid transformere PQ og enhver Perspektivaxe for en Transformation af 4de Orden hørende til Gruppen til Linier, der gaa gjennem et af de 6 Punkter P, Q, S, P_1, Q_1, S_1, da der ellers paa PQ vilde findes flere end 6 Dobbeltpunkter for Transformationer af 4de Orden, som transformerede PQ til sig selv. Vi kunne tillige antage, at i det mindste én Potens af T transformerer PQ til en Linie, der ikke gaar gjennem R, idet, hvis dette skulde være Tilfældet, ellers en af Perspektivaxerne gjennem R vilde transformeres til en Linie, der hverken gik gjennem R eller faldt sammen med PQ, og kunde anvendes paa samme Maade i Beviset, som vi her anvende PQ.

Under den gjorte Forudsætning vil da den Linie, hvortil PQ transformeres, skjære hver af de 6 Perspektivaxer gjennem R i et Dobbeltpunkt for en Transformation af 4de Orden, der transformerer hver af dem til sig selv.

Ligesom ethvert Skjæringspunkt for 2 Perspektivaxer for Transformationer af 4de Orden er Centrum for en ny perspektivisk Transformation af 4de Orden, saaledes er enhver Forbindelseslinie for 2 Centra for saadanne Transformationer en ny Perspektivaxe for en saadan Transformation.

Nu have vi set, at der existerede i det mindste 4 Axer, af hvilke ikke 3 gik gjennem samme Punkt, idet PQ blev transformeret til en Linie, der hverken gik gjennem R eller faldt sammen med PQ, og der gjennem R gik 6 saadanne Axer.

Saadanne 4 Axer kunne vi nu tænke os omprojicerede til 2 vilkaarlige Par parallele Linier, der staa vinkelrette paa hinanden, og hvis Skjæringspunkter ere $ABCD$[1]).

---

[1]) Læseren bedes selv tegne en Figur.

Da er den uendelig fjerne Linie ogsaa en Perspektivaxe, ligesom Linierne AC og BD, der skjære hinanden i E, og Linier gjennem E parallele henholdsvis med AD og AB. Lad os antage, at disse sidste Liniers Skjæringspunkter med Linierne AB, BC, CD, DA ere a, b, c, d, da vil der være følgende nye Axer ab, ad, Ab, Bd, som ville skjære DC i 4 Punkter forskjellige fra D, c, C, saa at der i det mindste paa denne Linie vilde falde 7 Skjæringspunkter med andre Perspektivaxer, hvad der er umuligt, da disse Punkter ere Centrer for perspektiviske Transformationer af 4de Orden, og CD skulde transformeres til sig selv ved en endelig Transformationsgruppe, saa at der i det højeste kunde være 6 saadanne Centra paa CD.

Hvis altsaa en endelig Gruppe indeholder perspektiviske Transformationer af 4de Orden, maa den enten være cyklisk, eller alle dens Transformationer maa transformere samme rette Linie til sig selv.

37) Vi komme nu til endelige Grupper, der indeholde perspektiviske Transformationer af 3die Orden. Kaldes en saadan Transformation A, antages det tillige, at Gruppen indeholder en Transformation C, der ikke har et Dobbeltpunkt i A's Centrum, og transformerer A til en Transformation B, saaledes at alle Transformationer i den Gruppe, der kan dannes ved Sammensætning af A og B, transformere den Linie, der forbinder deres Centra, til sig selv ved en Tetraedertransformation. Vi antage Koordinatsystemet lagt ligesom i de forrige Tilfælde og antage da

$$A = \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a} z \end{cases} \qquad B = \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor a er en primitiv 9de Rod af Enheden.

AB er en Transformation, der enten transformerer $x = 0$ til sig selv ved en Transformation af 2den Orden eller af 3die Orden. Vi kunne antage det sidste, da ellers dens Multiplikatorer vilde være $\bar{a}^2$, ia, $-ia$ og $(AB)^2$ være en perspektivisk Transformation af 6te Orden, hvad der vilde føre tilbage til før omtalte Grupper.

$A^2 B$ maa da transformere $x = 0$ til sig selv ved en Transformation af 2den Orden (være af 2den Orden for denne Linies Vedkommende), hvis Multiplikatorer ere (da de kun ere bestemte paa nær en Faktor, som er en vilkaarlig 3die Rod af Enheden), 1, i, $-i$, dens anden Potens en perspektivisk Transformation af anden Orden med Centrum i Skjæringspunktet for A's og B's Axer, Axe i Forbindelseslinien mellem deres Centra.

Vi ville nu undersøge, hvilke Undergrupper der kan forekomme i den Gruppe, vi undersøge, dannet ved Sammensætning af en perspektivisk Transformation af 2den Orden og en perspektivisk Transformation af 3die Orden hørende til Gruppen, idet vi antage, at ikke den enes Centrum ligger paa den andens Axe.

Idet vi atter tænke os Koordinatsystemet lagt som forhen, have saadanne to Transformationer Ligningerne

$$C = \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha} x \\ \mu y' = \alpha^2 y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \qquad D = \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Transformeres $x = 0$, den Linie der forbinder deres Centra, til sig selv ved en Ikosaeder eller Oktaedergruppe, vil der være Transformationer, der ombytte saavel C's som D's paa $x = 0$ liggende Dobbeltpunkter, altsaa transformere C til

$$\begin{aligned} \mu x' &= \bar{\alpha} x \\ \mu y' &= \bar{\alpha} y \\ \mu z' &= \alpha^2 x \end{aligned}$$

og transformere D paa lignende Maade. Gruppen maa da indeholde Transformationerne

$$C_1 = \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha}^2 x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \alpha z \end{cases} \qquad D_1 = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

og $C_1 D_1$ vil da være en perspektivisk Transformation af 6te Orden, saa at vi kunne forbigaa videre Omtale af saadanne Grupper.

Var Gruppen dannet ved C og D tetraedrisk for $x = 0$'s Vedkommende, er CD af 3die Orden for $x = 0$'s Vedkommende, og da en af Multiplikatorerne for $(CD)^3$ er -1, og denne skal være identisk for $x = 0$'s Vedkommende, maa den have Multiplikatorerne -1, i, i og være perspektivisk af 4de Orden. Gruppen maa da høre til de før omtalte.

Undergruppen kan da være cyklisk for $x = 0$, den indeholder da Transformationerne

$$\begin{aligned} \mu x' &= \bar{\alpha} x \\ \mu y' &= \bar{\alpha} y \\ \mu z' &= \alpha^2 z \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \mu x' &= \bar{\alpha}^2 x \\ \mu y' &= \alpha y \\ \mu z' &= \alpha z. \end{aligned}$$

Deraf ses, at skal Gruppen være endelig og ikke høre til de allerede omtalte Grupper, maa Axerne for 2 perspektiviske Transformationer af 3die og 2den Orden, der ikke gaa gjennem hinandens Centrum, skjære hinanden i et Punkt, der er Centrum for en perspektivisk Transformation af 3die Orden, hvis Axe er Forbindelseslinien mellem deres Centra.

Lad os nu antage, at P, p, Q, q ere Centrer og Axer henholdsvis for A og B, hvoraf A ved C transformeres til B, saa er Skjæringspunktet R mellem p og q Centrum for en perspektivisk Transformation F af 2den Orden, hvis Axe er PQ. Transformere vi nu F ved C, vil PQ transformeres til en Linie, der gaar gjennem Q, medens R transformeres til et Punkt af q. Transformerede nu C PQ til at gaa gjennem R, maatte R falde i q's Skjæringspunkt Q_1 med PQ; men dette er umuligt, da det i Forvejen er forudsat, at PQ transformeres til sig selv ved en Tetraedergruppe, og en af de Transformationer af 3die Orden, der transformere PQ til sig selv, har Dobbeltpunkt i Q_1, saa at dette ikke ogsaa kan være Dobbeltpunkt for en Transformation af 2den Orden, der transformerer PQ til sig selv. PQ maa da transformeres til en anden Linie QT, medens R transformeres til et Punkt U af q. Er T Skjæringspunktet mellem QT og p, maa T være Centrum for en perspektivisk Transformation af 3die Orden med Axe i PU, da QT og p ere Axer for en perspektivisk Transformation af 2den Orden og en af 3die Orden, hvis Centrer ikke ligger paa hinandens Axer. Der existerer da, som før vist, en Undergruppe af Transformationer med fælles Dobbeltpunkt i P, der alle transformere p til sig selv, og denne Undergruppe maa for p være cyklisk, da P er Skjæringspunktet mellem Axerne, PQ og PU, for en perspektivisk Transformation af 2den Orden og en af 3die Orden, hvis Centrer R og T findes paa p.

R maa da, ved de Transformationer der transformere q til sig selv, i det højeste kunne transformeres til 2 Punkter af denne, eller der maa gjennem hvert Perspektivcentrum for en Transformation af 3die Orden beliggende paa PQ, gaa højest 2 Linier, der ere Transformationer af denne Linie. Det ses da, at der netop maa gaa dette Antal Linier gjennem Q og de omtalte Punkter, d. v. s. der maa gjennem hvert Perspektivcentrum for en Transformation af 3die Orden, hvortil Q kan transformeres, gaa 3 Linier, der ere Transformationer af PQ.

PQ indeholder 4 Centrer for perspektiviske Transformationer af 3die Orden. Igjennem hver af disse maa der gaa 2 Linier L, der ere Transformationer af PQ, og disse ere de eneste existerende Transformationer af PQ; thi ellers vilde der være saadanne Linier L, der gik gjennem 4 Perspektivcentrer for Transformationer af 3die Orden, beliggende paa Axer for saadanne Transformationer gaaende gjennem R. Da ethvert L ved Transformationer i Gruppen kan bringes hen til mindst tre Stillinger, kom disse Axer til hver at indeholde flere end 2 Centrer, som er umuligt.

Gruppen kommer da til at indeholde en Samling paa $9 . 6$ Transformationer af 4de Orden, og denne vil udgjøre $\frac{1}{4}N$, naar hele Gruppen indeholder N Transformationer. N er da 216. Nu udgjør de Transformationer med tilhørende Samlinger, som transformere PQ til sig selv, $\frac{1}{4}N + \frac{1}{3}N + \frac{1}{9}N + \frac{1}{24}N = \frac{53}{72}N = 159$ Transformationer. Gruppen maa da indeholde Transformationer, der ikke høre til disse Samlinger. Men dette er umuligt, da ingen Sæt Dobbeltpunkter med tilhørende Samlinger tilsammen kan indeholde $\frac{56}{216}N = \frac{7}{27}N$ Transformationer.

38) Vi ere nu naaede til at vise, at, hvis en endelig Gruppe ikke er cyklisk eller indeholder lutter Transformationer, der transformere samme rette Linie til sig selv, kan den kun indeholde perspektiviske Transformationer, der ere af 2den Orden.

Vi skulle nu undersøge, hvorvidt en endelig Gruppe, der ikke er af de før nævnte Arter, kan indeholde to Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter, hvis Potenser kunne være en perspektivisk Transformation af 2den Orden. Da de to Transformationer maa transformere samme rette Linie til sig selv, kunne de antages at være

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha' x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor $x = 0$ er den rette Linie, som begge Transformationerne transformere til sig selv.

Efter Forudsætningen maa der da være 2 Tal m og n, saaledes at

$$C \equiv A^n \equiv B^m \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z. \end{cases}$$

Da $x = 0$ skal transformeres til sig selv ved en endelig Gruppe, maa denne enten være cyklisk, tetraedrisk, oktaedrisk eller ikosaedrisk. Der maa da til Gruppen høre Transformationer, der ombytte enten baade A's og B's paa $x = 0$ liggende Dobbeltpunkter, medens de lade deres fælles Dobbeltpunkt uforandret, eller Transformationer, der gjøre dette for den ene af Transformationerne A, saa at vi altid kunne antage, at der til Gruppen hører en Transformation

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^2 x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z, \end{cases}$$

hvoraf ses, at α maa være ± 1 og at, hvis ogsaa B's Dobbeltpunkter ombyttes ved en Transformation hørende til Gruppen, at da det samme maa være Tilfældet med α'.

Skulde der ikke være en Transformation i Gruppen, der ombytter B's Dobbeltpunkter maa Gruppen enten for $x = 0$ være cyklisk, B for denne Linies Vedkommende af 2den Orden, eller tetraedrisk B af 3die Orden for $x = 0$. Desuden kan B ikke være af 2den Orden, da saa B var en Potens af A.

Lad os antage, at Gruppen dannet ved A og B for $x = 0$'s Vedkommende er oktaedrisk eller ikosaedrisk, saa har A og B Formerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \pm \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

Disse ere nu begge ikke af 2den Orden, og en af dem i det mindste kan antages ikke at være af 2den Orden for $x = 0$'s Vedkommende. Er nu en af dem B af 2den Orden for $x = 0$'s Vedkommende, maa man bruge øverste Fortegn for denne, da ellers B^2 var identisk og ingen Potens af den af Formen C. Er A ikke af 2den Orden for $x = 0$'s Vedkommende, er den enten af 3die, 4de eller 5te Orden. Er den af 3die eller 5te Orden, maa A i en ulige Potens være en perspektivisk Transformation identisk med C, hvilket er umuligt, hvis nederste Fortegn bruges. Man maa da bruge øverste Fortegn. Er den endelig af 4de Orden for $x = 0$'s Vedkommende, maa man have

$$\pm \alpha^2 = \pm i.$$

Lad os nu antage at vi skulde bruge nederste Fortegn, saa havde man

$$A = \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = -\bar{\alpha} z. \end{cases}$$

Der maa da høre mindst endnu en Transformation B til Gruppen med de samme Multiplikatorer som A, der ligeledes transformerer $x = 0$ til sig selv. Multipliceres B med A faas en Transformation D af 3die Orden for $x = 0$, hvis Multiplikatorer ere 1, α', $\bar{\alpha}'$, hvor $\alpha' = \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Desuden maa der til Gruppen høre Transformationer af 2den Orden, der transformere $x = 0$ til sig selv, og hvis Multiplikatorer ere -1, -1, 1. Disse kunne høre til samme Samling som A^4.

Der er nu i Alt 48 Transformationer, der transformere $x = 0$ til sig selv.

Indeholder hele Gruppen N Transformationer udgjør A og dens Potenser (med Undtagelse af 4de Potens) og tilhørende Samlinger $\frac{3}{8}N$ Transformationer, AB med Potenser og tilhørende Samlinger $\frac{1}{3}N$ (med Undtagelse af den Potens, der er lig A^4), og endelig A^4 med tilhørende Samling $\frac{1}{48}N$, tilsammen $\frac{35}{48}N$ Transformationer.

Gruppen kan da (smlgn. S. 166) kun endnu indeholde en Transformation af 2den Orden med tilhørende Samling udgjørende $\frac{1}{4}N$ Transformationer. Man maa da have $N = 48$. Den eneste existerende Gruppe af den omtalte Art er da en saadan, at alle Transformationer i den transformere samme rette Linie til sig selv.

Hvad der her er sagt i det foregaaende om Transformationer af ulige Orden og Transformationer af anden Orden, ses ogsaa at finde Anvendelse paa Tetraedergruppen, saa at ogsaa for dens Vedkommende øverste Fortegn maa bruges i alle Tilfælde.

Er endelig Gruppen cyklisk for $x = 0$'s Vedkommende, maa en af Transformationerne B, for denne Linies Vedkommende være af 2den Orden og vi kunne for B da kun bruge øverste Fortegn.

Er A af ulige Orden for $x = 0$'s Vedkommende, ses det ogsaa ligesom før, at man for A's Vedkommende kun kan bruge øverste Fortegn.

Er A af lige Orden for $x = 0$'s Vedkommende, maa man have den i det mindste af 8de Orden for Planens Vedkommende, hvis øverste Fortegn skal kunne bruges.

Vi ville udsætte den nøjere Betragtning af de Grupper, hvori der kunne forekomme saadanne Undergrupper som de sidst nævnte, for at gaa over til at undersøge hvor mange Transformationer forskjellige Undergrupper med tilhørende Samlinger til deres Transformationer ville udgjøre.

39) Lad os antage, at en Transformation A med Multiplikatorerne α, β, γ hører til en Gruppe, saa ville vi undersøge, hvornaar en anden Transformation hørende til Gruppen kan transformere A til en Transformation med de samme Dobbeltpunkter.

Dette kan ske under 3 Omstændigheder, idet vi antage, at A ikke er perspektivisk:

1) Naar alle dens Dobbeltpunkter lades uforandrede.

2) Naar 2 af dens Dobbeltpunkter ombyttes, medens det 3die lades uforandret.

3) Naar de alle 3 ombyttes (kredsforskydes).

Vi tage i det følgende ikke Hensyn til saadanne Grupper, om hvilke det i det foregaaende er bevist, at de enten maa være Grupper, hvori alle Transformationer transformere samme rette Linie til sig selv, eller ere cykliske.

1) Skal nu A's Dobbeltpunkter alle blive uforandrede, maa de Transformationer, der transformere A paa denne Maade, selv have A's Dobbeltpunkter til Dobbeltpunkter.

Nu have vi set, at hvis 2 forskjellige Transformationer af n^{te} Orden have fælles Dobbeltpunkter og ikke have en fælles Potens, vil der forekomme perspektiviske Transformationer i Gruppen af Ordenen n, med de fælles Dobbeltpunkter til Dobbeltpunkter. n kan da kun være 2. Alle Transformationer, der have fælles Dobbeltpunkter, ere da enten

a) Alle Potenser af samme Transformation

eller

b) Potenser af samme Transformation A, i Forbindelse med disse Transformationer multiplicerede med en Transformation af 2den Orden, der har sit Perspektivcentrum i et af A's Dobbeltpunkter, sin Axe gaaende gjennem de 2 andre.

2) 2 Dobbeltpunkter for A kunne ombyttes. Dette maa da ske ved en Transformation B, der transformerer Forbindelseslinien mellem 2 af A's Dobbeltpunkter P og Q til sig selv, medens den lader det 3die, R, uforandret. B maa da faa PQ til Dobbeltlinie og 2 af sine Dobbeltpunkter liggende herpaa.

B^2 maa da lade alle A's Dobbeltpunkter uforandrede, og altsaa have dem til Dobbeltpunkter, og desuden endnu have 2 Dobbeltpunkter PQ. Den maa da enten være identisk eller perspektivisk med R til Centrum, PQ til Axe.

I første Tilfælde maa B være af 2den Orden med sit Centrum paa PQ, sin Axe gaaende gjennem R, og saaledes at Axen og Centret dele PQ harmonisk. I sidste Tilfælde maa B være af 4de Orden, have 2 Dobbeltpunkter paa Linien PQ, saaledes at denne Linie deles harmonisk, sit 3die i R, med tilsvarende Multiplikatorer i, $-i$, $+1$. I dette sidste Tilfælde, vil der, som det let ses, altid være en Potens af en Transformation med Dobbeltpunkterne PQR, der falder sammen med B^2.

Lad os nu antage, at B ombytter Dobbeltpunkterne svarende til Multiplikatorerne β og γ i A og lad os antage

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases}$$

saa indeholder Gruppen altsaa ogsaa Transformationen

$$\begin{aligned} \mu x' &= \alpha x \\ \mu y' &= \gamma y \\ \mu z' &= \beta z \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \mu x' &= \alpha^2 x \\ \mu y' &= \beta\gamma y = \bar{\alpha} y \\ \mu z' &= \beta\gamma z = \bar{\alpha} z. \end{aligned}$$

Denne sidste Transformation er perspektivisk og maa altsaa være af 2den Orden. α kan da kun være ± 1, og

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \pm \bar{\alpha} z. \end{cases}$$

3) Endelig ville vi undersøge, hvornaar en Transformation B kan kredsforskyde Dobbeltpunkterne i A. Denne anden Transformation B maa være af 3die Orden, eftersom tredie Potens af denne skal lade Dobbeltpunkterne i A uforandrede, og B^3 desuden har B's Dobbeltpunkter, saa at B^3 maa være identisk.

Lad os nu antage

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases}$$

saa vil denne Transformation ved Kredsforskydning af Dobbeltpunkterne blive til

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \beta x \\ \mu y' = \gamma y \\ \mu z' = \alpha z \end{cases}$$

og

$$A'' = \begin{cases} \mu x' = \gamma x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \beta z. \end{cases}$$

Her skal nu A' og A'' enten være Potenser af A eller saadanne Potenser multiplicerede med en perspektivisk Transformation af 2den Orden.

Vi kunne nu antage, at A er af $m$te Orden, idet vi antage, at $m = p_1^a \cdot p_2^b \dots$, hvor p_1, p_2 ... ere Primtal. Vi behøve da kun at undersøge, hvor naar det er muligt, at en saadan Kredsforskydning af Dobbeltpunkterne kan finde Sted, hvis A var af Ordenen p_1^a, p_2^b ..., idet, hvis den kan finde Sted for Transformationer af disse Ordener, den ogsaa kan finde Sted naar $m = p_1^a \cdot p_2^a \dots$.

Lad os da først undersøge hvor naar den kan finde Sted, naar A er af Ordenen 3^a, eller rettere, naar α, β, γ ere 3^ade primiske Rødder af Enheden[1]). Man skal da have

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \beta^m f \\ \beta &= \gamma^m f \\ \gamma &= \alpha^m f \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

hvor f er en 3die Rod af Enheden. Vi behøve imidlertid her kun at sætte $a = 1$ og 2. Hvis $a = 1$, er det klart, at Ligningerne (77) kunne tilfredsstilles. Er $a = 2$, saa kunne vi af Ligningerne (77) faa

$$1 = \alpha^{m^3-1} f^{m^2+m+1}, \quad (78)$$

hvor vi kun behøve at give m Værdierne 1 og 2. For 1 faar man, idet f er en 3die Rod af Enheden

$$\beta = \alpha f^{-1}$$
$$\gamma = \alpha f,$$

og da $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha^3 = 1$, saa at α ikke er nogen 9de primisk Rod af Enheden. For $m = 2$ er (78) umulig.

Det ses da, at da man ikke kan bruge $a = 2$, kan man heller ikke bruge højere Værdier af a, idet for højere Værdier af a en Potens af Transformationen vilde have Multiplikatorer, der vare 3^2 primiske Rødder af Enheden.

Er A en Transformation af p_1^ate Orden, hvor p_1 ikke er 3, skal man have, naar dens Multiplikatorer ere α, β, γ

$$\beta = \alpha^m$$
$$\gamma = \beta^m$$
$$\alpha = \gamma^m,$$
$$1 = \alpha^{m^3-1}$$
$$1 = \beta^{m^3-1}$$
$$1 = \gamma^{m^3-1},$$

[1]) Er Transformationen ikke perspektivisk, vil den da være af 3^ade Orden.

hvoraf ses, at p_1 maa være et Primtal, der er af Formen

$$p_1 = 3q + 1,$$

da

$$m^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p_1^{a_1}}.$$

Endelig kan der endnu, hvad der ses umiddelbart, findes en Transformation af Ordenen 2, med samme Dobbeltpunkter som A.

Hvis altsaa ikke alle Transformationer i en Gruppe skulle transformere samme rette Linie til sig selv eller Gruppen være cyklisk, maa saadanne Transformationer i Gruppen, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen, være af en Orden n, hvor n kan indeholde Faktorerne 2 og 3 samt Primfaktorer af Formen $3q + 1$.

40) Vi skulle nu paa Grundlag af det foregaaende se, hvor store Dele af en Gruppe forskjellige Undergrupper med tilhørende Samlinger danne.

Vi kalde stedse Antallet af Transformationer i Gruppen N, og udelade saadanne Transformationer af Betragtningen, der ere cykliske, eller hvis Transformationer alle transformere den samme rette Linie til sig selv.

Lad os først antage, at ingen Potenser af Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter ere identiske.

Vi antage først, at der til 3 givne Dobbeltpunkter høre Transformationer, der alle ere af ulige Orden. Transformationerne kunne da alle anses for Potenser af een og samme Transformation A, hvis Orden vi antage er n. Er n forskjellig fra 3, vil A kun kunne transformeres til sig selv ved de Transformationer, der have samme Dobbelpunkt som A. Af saadanne gives der n, og A med tilhørende Samling udgjør da $\frac{N}{n}$ Transformationer.

Nu kan det enten være Tilfældet, at der ikke er Transformationer i Gruppen, der ombytte noget af dens Dobbeltpunkter. I saa Tilfælde ville de Samlinger, der tilhøre A's Potenser, alle være forskjellige, og Antallet af Transformationer i alle disse Samlinger tilsammen være

$$\frac{(n-1)}{n} N.$$

Dernæst kan det være Tilfældet, at en Transformation i Gruppen kan ombytte 2 af A's Dobbeltpunkter. Dette kan kun finde Sted, hvis A's Multiplikatorer ere 1, α, $\overline{\alpha}$ og da kun for de Dobbeltpunkter, der svare til α, $\overline{\alpha}$. I dette Tilfælde ville Potenserne af A to og to komme til at høre til samme Samling, og A med tilhørende Samlinger (de Samlinger, der tilhøre A's Potenser) vil udgjøre

$$\frac{(n-1)N}{2n}$$

Transformationer.

Endelig, hvis A er en Transformation af Ordenen p eller $3p$, hvor p er et Produkt af Primfaktorer af Formen $3q+1$, kan det være Tilfældet, at Dobbeltpunkterne for A kunne kredsforskydes ved andre Transformationer i Gruppen. I saa Tilfælde ville 3 Potenser af A høre til samme Samling, og A med Potenser og tilhørende Samlinger indeholder da

$$\frac{(p-1)N}{3p}$$

Transformationer.

Vi have da endelig tilbage at undersøge, hvor mange Transformationer A med Potenser og tilhørende Samlinger udgjør, naar A er af 3die Orden og ikke er en Potens af en anden Transformation.

Vi kunne da antage, at A er af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z, \end{cases}$$

hvor $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Det kommer nu an paa at afgjøre, hvor mange Transformationer, der gives i Gruppen, der lade A uforandret. Vi behøve kun at undersøge det Tilfælde, hvor A's Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation B i Gruppen. En saadan Transformation maa være af 3die Orden og have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = py \\ \mu y' = qz \\ \mu z' = rx \end{cases}$$

eller en lignende Form fremkommet ved Kredsforskydning af Leddene paa højre Side. Vi kunne gjerne antage, at i B $p=q=r=1$. Lad nu en anden Transformation, der kredsforskyder A's Dobbeltpunkter være

$$B_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = p_1 z \\ \mu y' = q_1 x \\ \mu z' = r_1 y, \end{cases}$$

saa er

$$BB_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = q_1 x \\ \mu y' = r_1 y \\ \mu z' = p_1 z, \end{cases}$$

hvor BB_1 er en Transformation, der har samme Dobbeltpunkter som A, og altsaa maa være en Potens af A. Man har da

$$BB_1 \equiv A^p$$
$$B_1 \equiv A^p B^{-1}.$$

Enhver Transformation, der lader A uforandret, faas da ved at multiplicere en Potens af B med en Potens af A, og det ses tillige, at enhver saadan Transformation transformerer A til sig selv. Der gives da 9 Transformationer, der lade A uforandret, og A med tilhørende Samling udgjør da $\frac{N}{9}$ Transformationer. Er der ingen Transformation, der ombytter 2 af A's Dobbeltpunkter vil A med Potenser og tilhørende Samlinger udgjøre $\frac{2N}{9}$ Transformationer, er der derimod saadanne, vil A og A^2 høre til samme Samling, og A med Potenser og tilhørende Samlinger udgjøre $\frac{N}{9}$ Transformationer.

41) Vi gaa nu over til at betragte Transformationer af lige Orden, der alle have samme Dobbeltpunkter, idet vi stadigt gjøre samme Forudsætning som i 40).

Da maa enten alle Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter, være Potenser af samme Transformation, eller ogsaa maa de være Potenser af samme Transformation i Forbindelse med disse samme Transformationer multiplicerede med en Transformation af 2den Orden, der har sit Centrum i et af Dobbeltpunkterne, sin Axe gaaende gjennem de to andre. Fandtes der andre Transformationer med de samme Dobbeltpunkter, vilde der forekomme perspektiviske Transformationer af højere end 2den Orden, og vi vilde altsaa føres til saadanne Grupper, som vi her forbigaa.

I sidste Tilfælde bestaa altsaa Transformationerne af Sammensætninger af 2 Transformationer af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{og } B \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

hvor A er en Transformation af lige Orden. Thi var A af ulige Orden, vilde baade A og B være Potenser af samme Transformation AB. A maa desuden være af Orden $2n$, hvor n er et ulige Tal. Var A af Ordenen $2^p n$, var $A^{2^{p-2}\cdot n}$ af 4de Orden og havde da Multiplikatorerne 1, i, $-i$, den maatte da hedde

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm ix \\ \mu y' = y \\ \mu z' = \mp iz. \end{cases}$$

Thi havde x andre Multiplikatorer, vilde $A'B$ være perspektivisk af 4de Orden. Men da er B 2den Potens af A', og der var altsaa ikke 2 Transformationer med de samme Dobbeltpunkter, hvoraf den ene ikke var en Potens af den anden. Vi kunne altsaa forudsætte, at A er af $2n$te Orden. Sammensætninger af A og B maa da give $(4n-1)$ Transformationer, herunder ikke indbefattet den identiske Transformation.

Man faar nu ganske paa samme Maade, som naar Transformationens Orden var ulige, at eftersom der ikke er nogen Transformation, eller der er en Transformation, der ombytter to Dobbeltpunkter for en Transformation A, vil A med Potenser og tilhørende Samlinger udgjøre respektive $\frac{q-1}{q}N$ eller $\frac{q-1}{2q}N$ Transformationer, naar der er q Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som A. Ombyttes A's Dobbeltpunkter, maa Multiplikatorerne være ± 1, $\pm \alpha$, $\pm \bar{\alpha}$, idet α er en Rod af Enheden.

Lad os betragte det Tilfælde nøjere, hvor den første Multiplikator er -1. Man har da

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = -\bar{\alpha} z, \end{cases}$$

medens Transformationen B, der ombytter A's Dobbeltpunkter, maa have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a' x \\ \mu y' = c_2 z \\ \mu z' = b_3 y. \end{cases}$$

Man har da

$$B^2 \equiv \begin{cases} \mu x' = a'^2 x \\ \mu y' = c_2 b_3 y \\ \mu z' = c_2 b_3 z, \end{cases}$$

som enten er identisk eller perspektivisk af 2den Orden; thi da Determinanten for B er 1, er $a' c_2 b_3 = -1$, $c_2 b_3 = -\bar{a}'$. Er altsaa $a' = +1$, saa er B^2 af Formen

$$B^2 \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

B af 4de Orden. Vi kunne gjerne forudsætte B af 4de Orden; thi ellers var $a' = -1$, AB af 4de Orden.

Er der nu en Transformation af 2den Orden med samme Dobbeltpunkter som A, uden at være en Potens af A, eller er A af Ordenen $2^p . q$, $p > 1$, ses det, at B^2 og en Potens af en Transformation med samme Dobbeltpunkter som A ere identiske. I dette Tilfælde behøver A med tilhørende Samlinger ikke at indeholde det fundne Antal Transformationer, hvad der heller ikke gjælder om B med tilhørende Samlinger, idet vi da ere komne ind paa Betragtningen af Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter, der have samme Potens, hvad vi senere nøjere skulle behandle.

Er Transformationen A af 2den Orden og ikke nogen Potens af en anden Transformation i Gruppen, kan de foregaaende Regler ikke direkte anvendes. Men da vil den enten ikke kunne transformeres til sig selv ved nogen anden Transformation i Gruppen, i hvilket Tilfælde den med tilhørende Samling udgjør $\frac{N}{2}$ Transformationer, eller ogsaa vil den transformeres til sig selv ved en Transformation i Gruppen, der har et Dobbeltpunkt i dens Centrum, 2 i dens Axe. Kaldes denne B, kan ikke B (eller nogen Potens af den) være af ulige Orden; thi, var B^m af ulige Orden vilde AB være af lige Orden og en Potens heraf være identisk med A. Ligesom før (pag. 159) se vi da, at B maa være af 2den Orden. Tillige ses det, (paa samme Maade som ved Transformationen af 3die Orden), at, hvis A ikke skal være en Transformation, hvis Centrum falder sammen med Dobbeltpunktet i en anden Transformation, der ikke er af 2den Orden, maa A alene transformeres til sig selv ved A, B og AB, saa at A med Samling udgjør $\frac{N}{4}$ Transformationer.

Da een Potens af en Transformation af lige Orden altid er en Transformation af 2den Orden, ses det, at hvis Gruppen indeholder en Transformation A af lige Orden, $2n$, og en Transformation B, der kredsforskyder A's Dobbeltpunkter, maa den ogsaa indeholde perspektiviske Transformationer af 2den Orden med Centrum i et vilkaarligt af A's Dobbeltpunkter. Der maa da være $4n-1$ Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som A. A med tilhørende Samling vil komme til at indeholde $\frac{N}{4n}$ Transformationer, og da de i Samlingen forekommende Transformationer ville have $\frac{N}{12n}$ forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, idet 3 af de Transformationer, hvortil A transformeres, have samme Dobbeltpunkterne som A, vil A og de Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som A med tilhørende Samlinger udgjøre $\frac{(4n-1)N}{12n}$ Transformationer.

42) Vi gaa nu over til at betragte Undergrupper, hvor Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter have samme Potens, idet vi stadigt kun tage Hensyn til saadanne Grupper, hvori ikke alle Transformationer transformere samme Linie til sig selv eller ikke ere cykliske.

Vi kunne nu først antage, at alle disse Transformationer, der have samme Potens, som altid maa være en Transformation af 2den Orden, transformere en ret Linie $x = 0$ til sig selv ved en ikke-cyklisk Gruppe.

2 Transformationer i Gruppen (se (38)) ville da være

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = a y \\ \mu z' = \bar{a} z \end{cases} \qquad \text{og } B \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Vi kunne ikke have nogen anden Transformation, der har sit Dobbeltpunkt i et af de Dobbeltpunkter paa $x = 0$, der tilhører en af de Transformationer, der transformere $x = 0$ til sig selv, f. Ex. i et af A's Dobbeltpunkter, end Potenser af A; thi da vilde een af Dobbeltlinierne for A enten transformeres til sig selv ved en Gruppe af Transformationer, der havde et fælles Dobbeltpunkt i A's Dobbeltpunkt $x = 0$, $z = 0$, uden at Dobbeltpunkterne i alle Transformationerne vare sammenfaldende med A's Dobbeltpunkter, og saaledes, at den til $x = 0$, $z = 0$ svarende Multiplikator af A var forskjellig fra ± 1, (idet der til ethvert Dobbeltpunkt i $x = 0$ i det mindste svarer en Multiplikator forskjellig fra ± 1), hvad der er umuligt under den gjorte Forudsætning (se Begyndelsen af (42)), eller ogsaa vilde der være en Transformation, med samme Dobbeltpunkter som A, der uden at være en Potens af A transformerede $x = 0$ til sig selv.

Da der ikke kan komme nye Transformationer til for $x = 0$, da Gruppen for dennes Vedkommende er fuldstændig, og da den til $y = 0$, $z = 0$ svarende Multiplikator maa være $+1$, ses dette at være umuligt.

Kaldes nu, ligesom før, Antallet af Transformationer i hele Gruppen N, saa er enhver Transformation A, der transformerer $x = 0$ ved en Transformation af n^{te} Orden, af $2n^{\text{te}}$ Orden. En saadan transformeres da til sig selv ved $2n$ Transformationer og udgjør med tilhørende Samling $\frac{N}{2n}$ Transformationer. Der kan ikke existere en Transformation i Gruppen, der ombytter alle dens 3 Dobbeltpunkter, da der saa vilde komme en ny Transformation med samme Dobbeltpunkter som A. Den n^{te} Potens af A er af 2^{den} Orden.

Det ses nu, at alle Potenser af A, med Undtagelse af den n^{te}, med tilhørende Samlinger, ville udgjøre

$$\frac{(2n-2)N}{2n} \text{ eller } \frac{(2n-2)}{4n}N,$$

eftersom der er Transformationer, der ombytte A's Dobbeltpunkter, eller der ikke er saadanne, medens den n^{te} Potens af A, der er af 2^{den} Orden, transformeres til sig selv ved alle Transformationer, der transformere $x = 0$ til sig selv.

Er dette Antal $2q$, udgjør altsaa A^n med tilhørende Samling $\frac{N}{2q}$ Transformationer. Tages nu Summen af Antallet af alle de Transformationer, hvorved $x = 0$ transformeres til sig selv, faas

$$\left(\Sigma\frac{n-1}{n} + \Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}\right)N + \frac{N}{2q} = \frac{2q-1}{2q}N,$$

idet $N\Sigma\frac{n-1}{n}$ antyder Antallet af Transformationer, hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes ved nogen Transformation i Gruppen, $N\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}$ Antallet af de Transformationer, hvis Dobbeltpunkter ombyttes, og Ligningen faas ifølge de bekjendte Sætninger om Transformationsgrupperne for den rette Linie.

Er Gruppen cyklisk for $x = 0$'s Vedkommende, kan den tænkes opstaaet ved Sammensætning af 2 Transformationer

$$A = \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = \pm \bar{a} z \end{cases} \qquad \text{og } B = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -z \\ \mu z' = y, \end{cases}$$

for underste Fortegns Vedkommende muligvis i Forbindelse med perspektiviske Transformationer af 2den Orden, der have deres Centrer henholdsvis i $x = 0$, $y = 0$ og $x = 0$, $z = 0$. Vi ville først undersøge de Tilfælde, hvor vi for A bruge øverste Fortegn.

Lad os først antage, at A transformerer $x = 0$ ved en Transformation af ulige Orden. Vi kunne da bruge akkurat de samme Betragtninger som i forrige Tilfælde. A maa altid være af lige Orden og i dette Tilfælde af $2q^{\text{de}}$ Orden, hvor q er et ulige Tal. Sammensætningen af A og B giver da $4q - 1$ Transformationer, A og dens Potenser $2q - 1$ Transformationer, medens der bliver $2q$ Transformationer af 4de Orden ved at danne Produkterne $A^m B$. I Forbindelse med de tilhørende Samlinger ville disse Transformationer tilsammen udgjøre $\frac{4q-1}{4q} N$ Transformationer.

Transformerer A $x = 0$ til sig selv ved en Transformation af lige Orden, maa A, idet vi kun her tage Hensyn til øverste Fortegn, være af Ordenen $4q$, hvor q er et helt Tal. Den cykliske Gruppe, hvorved $x = 0$ transformeres til sig selv, kommer til at indeholde 3 forskjellige Samlinger. Kalde vi nemlig den Transformation, hvorved A transformerer $x = 0$ til sig selv, A', den tilsvarende hvorved B transformerer $x = 0$ til sig selv B' o. s. v., vil Gruppen for $x = 0$ indeholde A' og dens Potenser, Samlingen bestaaende af B' multipliceret med lige Potenser af A' og Samlingen bestaaende af A' multipliceret med μ lige Potenser, altsaa indeholdende henholdsvis Transformationerne $A'^{2m} B'$ og $A'^{2m+1} B'$, hvor m er et vilkaarligt Tal. Disse udgjøre den fuldstændige Gruppe, hvorved $x = 0$ transformeres til sig selv. De tilsvarende Transformationer for Planet $A^{2m} B$ og $A^{2m+1} B$ ere af 4de Orden, hver med 2 Dobbeltpunkter paa $x = 0$, og skulde en Transformation i Gruppen transformere saadanne 2 Transformationer til hinanden, maatte den ogsaa transformere $x = 0$ til sig selv. Men da existerede der for $x = 0$ en Transformation, foruden de nævnte, hvad der ikke kan være Tilfældet, under Forudsætning af, at A' er Transformationen af højest Orden, hvorved $x = 0$ transformeres til sig selv.

De Transformationer, hvorved A transformeres til sig selv, med tilhørende Samlinger ville da i dette Tilfælde udgjøre $\frac{8q-1}{8q} N$ Transformationer.

Vi antage nu, at der skal bruges underste Fortegn; men at der ikke findes Transformationer af 2den Orden med Centrum i $x = 0$, $y = 0$ eller $x = 0$, $z = 0$. A maa da være af Ordenen $8q$, hvor q er et helt Tal. Den kan nemlig ikke være af Ordenen $2q$, naar q er ulige, idet da ingen Potens af den vilde være en Transformation af 2den Orden med Centrum i $y = 0$, $z = 0$. Den kan heller ikke være af Ordenen $4q$, naar q er ulige. A^q vilde nemlig da være af 4de Orden, og da Koefficienten til x i første Ligning for A^q vilde være -1, maatte den have Multiplikatorerne -1, i, i og førte altsaa til de Grupper, hvis Undersøgelse vi her forbigaa.

Bruge vi de samme Betegnelser som før, vil der være i Gruppen for $x = 0$ tre Samlinger, A' med Potenser, Transformationerne $A'^{2m} B'$, $A'^{2m+1} B'$. De tilsvarende Transformationer af Planet ere her henholdsvis af Ordenen 4 og 2, og det ses, at de paa $x = 0$ liggende Dobbeltpunkter for den ene ikke kan transformeres hen til Dobbeltpunkterne for den anden, enten af samme Grund som før, eller fordi Gruppen vilde komme til at indeholde perspektiviske Transformationer af 4de Orden.

Derimod er der her intet i Veien for, at det 3die Dobbeltpunkt for en Transformation $A^{2m}B$ muligvis ved en Transformation i Gruppen kunde transformeres hen til Perspektivcentret for en Transformation $A^{2m+1}B$, saa at altsaa $A^{2m+1}B$ og $(A^{2m}B)^2$ hørte til samme Samling. Vi se imidlertid, at A med Potenser og tilhørende Samlinger samt $A^{2m}B$ med tilhørende Samlinger maa udgjøre $\frac{12q-1}{16q}N$ Transformationer.

Skal Gruppen indeholde Transformationer af 2den Orden med Centrum i $x = 0$, $y = 0$ og $x = 0$, $z = 0$, kunne vi altid tænke os de Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som A, fremkomne ved Sammensætning af 2 Transformationer

$$A = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \qquad \text{og} \quad A_1 = \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

hvor A er af lige Orden $2q$. Der findes da $4q$ Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som A. q maa være et ulige Tal, da der ellers vilde forekomme perspektiviske Transformationer af 4de Orden. Idet vi ligesom før antage, at Gruppen indeholder en Transformation

$$B = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -z \\ \mu z' = y, \end{cases}$$

se vi, at den vil indeholde A med tilhørende Samlinger samt Transformationer af 4de Orden med tilhørende Samlinger af Formen $A^m B$; endelig vil den endnu indeholde Transformationer af 2den Orden af Formen $A^m A_1 B$, men ligesom før er det muligt, at disse høre til de allerede før omtalte Samlinger. Er nu $q > 3$, vil A og Transformationerne $A^m B$ med tilhørende Samlinger udgjøre $\frac{6q-1}{8q}N$ Transformationer. Er $q = 3$, kan det være, at Gruppen indeholder en Transformation, der kredsforskyder A's Dobbeltpunkter, og A med tilhørende Samlinger vil da udgjøre $\frac{11}{72}N$ Transformationer, medens Transformationerne $A^m B$ med tilhørende Samlinger ville udgjøre $\frac{1}{4}N$ Transformationer, saa at disse Samlinger tilsammen udgjøre $\frac{29}{72}N$.

Idet ifølge 40) en Transformation, T, med tilhørende Samlinger udgjør $\frac{n-1}{n}N$, $\frac{n-1}{2n}N$ eller $\frac{n-1}{3n}N$ eller endelig mulig $\frac{N}{9}$ Transformationer, naar ingen Potens af T er identisk med en Potens af en anden Transformation, der har forskjellige Dobbeltpunkter fra T, er det nu let at bestemme alle de Grupper, der kunne forekomme, som indeholde

Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter; men hvoraf en Potens er samme Transformation. Thi i alle de omtalte Tilfælde, hvor A var af Formen

$$A = \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases}$$

og der ikke forekom nogen perspektivisk Transformation med Centrum i $x = 0$, $y = 0$, saa vi, at Transformationerne A og B og Produkter af disse med tilhørende Samlinger maatte udgjøre

$$\frac{p-1}{p} N$$

Transformationer, hvor p mindst var 8. Er nu p større end 8 kan Gruppen ikke indeholde nogen Samling, foruden de nævnte, da saa Antallet af Transformationer i de forskjellige Samlinger tilsammen var større end N, hvad der er umuligt. Vi maa da have

$$\frac{p-1}{p} N + 1 = N,$$

idet Gruppen endnu foruden de omtalte Samlinger indeholder den identiske Transformation. Vi have da

$$N = p,$$

og da dette netop er det Antal Transformationer, man faar ved at sammensætte A og B, bestaar Gruppen kun af disse Transformationer og Produkter af dem.

Var $p = 8$, kunde Gruppen muligvis endnu indeholde en Samling af Transformationer af 3die Orden, hvori enhver Transformations Dobbeltpunkter baade kunde kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen, og hvor ogsaa to Dobbeltpunkter kunne ombyttes ved en Transformation, der lod det tredie uforandret.

Gruppen vil komme til at bestaa af Transformationer af 4de Orden og deres Potenser, og af Transformationer af 3die Orden. Man skulde have

$$\frac{7}{8} N + \frac{1}{9} N + 1 = N$$

$$\underline{N = 72.}$$

G r u p p e n e r , s a a l e d e s s o m d e t s e n e r e s k a l v i s e s , e n d e l i g. Den vil til Undergruppe have en Gruppe paa 36 Transformationer, som senere nøjere skal undersøges, og om hvilken det skal vises, at den er Undergruppe.

Gruppen skal indeholde 8 Transformationer af 3die Orden, der danne en cyklisk Undergruppe.

Vi komme nu til de Tilfælde, hvor Gruppen skulde indeholde Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter, men hvoraf en Potens var samme perspektiviske Transformation, og som indeholdt en Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = -\bar{\alpha} z. \end{cases}$$

Hvis n ikke er 3, og A havde fælles Dobbeltpunkter med $4n$ Transformationer, saa vi, at det Antal Transformationer, der transformerede $x = 0$ til sig selv, med tilhørende Samlinger udgjør mindst

$$\frac{6n-1}{8n} N,$$

hvor n mindst var 2. Det ses da, at Gruppen, foruden de omtalte Samlinger, maa indeholde een Samling til af Transformationer af 2den Orden, idet en saadan Samling paa $\frac{1}{4} N$ Transformationer er den eneste mulige Samling, den endnu kan indeholde. Man har da

$$\frac{6n-1}{8n} N + \frac{1}{4} N + 1 = N$$
$$N = 8n,$$

hvoraf ses, at Gruppen alene indeholder Transformationer, der transformere samme rette Linie til sig selv.

Vi have da det ene Tilfælde tilbage, $n = 3$, og behøve kun at behandle det under den Forudsætning, at

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z, \end{cases} \qquad \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

og at Gruppen indeholder en Transformation, der kredsforskyder A's Dobbeltpunkter. Vi saa da, at A og de Transformationer af 4de Orden, der transformere $x = 0$ til sig selv med tilhørende Samlinger udgjøre

$$\frac{29\,N}{72}$$

Transformationer. Tillige ses, at de Transformationer, man faar ved at sammensætte A, B (se S. 164) og en Transformation af 3die Orden C, der kredsforskyder A's Dobbeltpunkter, udgjøre 71 Transformationer.

Det ses umiddelbart, at Gruppen ikke endnu kan indeholde 2 Transformationer med tilhørende Samlinger, for hvilke andre Transformationer i Gruppen kan ombytte to Dobbeltpunkter, idet disse da, da Antallet af Transformationer i dem begge tilsammen ikke kan udgjøre flere end $\frac{43}{72} N$ Transformationer, begge maatte være af 2den Orden eller den ene af 3die Orden, og det ogsaa ses, at dette er umuligt, da man skulde have

$$\frac{29}{72}N + \frac{36}{72}N + 1 = N,$$

som er en umulig Ligning eller $N = 72$, som ogsaa er umulig.

Man maa da have

$$\frac{29}{72}N + \frac{n-1}{2n}N + \Sigma\frac{n_1-1}{3n_1}N + \frac{q}{9}N + 1 = N,$$

hvor dog et eller flere af Leddene kunne mangle. Det er saaledes tydeligt, idet vi antage $n_1 \overline{\gtrless} 7$, (den mindste Værdi, forskjellig fra 3, n_1 kan have), at, hvis Leddene med n og n_1 begge skulle existere, maa man have $n = 2$, og altsaa

$$\frac{29}{72}N + \frac{1}{4}N + \frac{n_1-1}{3n_1}N + 1 = N$$

$$N = \frac{72n_1}{n_1+24},$$

som ses at være umulig, da Gruppen kom til at indeholde færre end 72 Transformationer. Vi maa altsaa enten udelade Leddet indeholdende n eller det, som indeholder n_1. Vi have da i første Tilfælde

$$\frac{29}{72}N + \frac{n-1}{2n}N + \frac{q}{9}N + 1 = N,$$

$$N = \frac{72n}{36-n}$$

idet q maa sættes lig 1.

Denne Formel kan muligvis bruges, naar $n = 35$, som vilde give $N = 72 \, . \, 35$. Gruppen skulde da indeholde $36 \, . \, 34$ Transformationer af 35te Orden og Potenser af disse. Der maatte altsaa være 36 forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, hvortil hørte Transformationer af 35te Orden. Gruppen skulde kun indeholde $\frac{N}{24} = 3 \, . \, 35$ Transformationer af 2den Orden, og disse hørte alle til samme Samling. Men da ses Gruppen at være umulig. Thi der vilde være 35 Transformationer af 2den Orden, som ombyttede Dobbeltpunkterne for enhver Transformation af 35te Orden, og som altsaa havde sit Centrum P paa en Dobbeltlinie D for en Transformation af 35te Orden.

Ethvert Centrum for en Transformation af 2den Orden er imidlertid Dobbeltpunkt for en Transformation af 6te Orden, og en Linie D gaaende gjennem P kunde altsaa transformeres hen til 6 Linier, alle gaaende gjennem P. Da hver af disse Linier skulde indeholde 35 Centra for Transformationer af 2den Orden, er herved Gruppens Umulighed bevist.

Idet det er umuligt at gjennemgaa alle Tilfælde udførligt, skal kun bemærkes, at lignende Maader vilde kunne bruges for at vise Umuligheden af lavere Værdier af n.

Manglede Leddet indeholdende n kunde man sætte

$$\frac{29}{72}N + \frac{n_1-1}{3n_1}N + \frac{n_2-1}{3n_2}N + 1 = N.$$

Man kunde her ikke sætte begge Størrelserne n_1 og n_2 større end 7. Vi kunne da sætte $n_1 = 7$ og faa da

$$N = \frac{504\, n_2}{168 - 11\, n_2},$$

hvor det eneste mulige Tal skulde være $n_2 = 12$, der vilde give $N = 168$, som dog ses heller ikke at kunne bruges, da 72 ikke gaar op heri, hvad der maa være Tilfældet, da $\frac{29}{72} N$ skal være et helt Tal.

Endelig kan man forsøge at sætte

$$\frac{29}{72} N + \frac{n_1 - 1}{3 n_1} N + \frac{q}{9} N + 1 = N$$

$$N = \frac{72\, n_1}{19 n_1 - 8 q n_1 + 24},$$

som let ses ikke at kunne bruges.

Det fremgaar heraf, at hvis en Gruppe indeholder en Transformation A, og baade indeholder andre Transformationer, der kredsforskyde Dobbeltpunkterne i A, og saadanne, der ombytte to af A's Dobbeltpunkter, medens de lade det tredie uforandret, medens A er en Transformation af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = a y \\ \mu z' = -a y, \end{cases} \qquad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

er Gruppen cyklisk.

43) Vi ville nu endelig gaa over til at bestemme alle de Grupper, som, uden at være cykliske, eller uden at alle Transformationerne i Gruppen transformere samme rette Linie til sig selv, ikke indeholde Transformationer med forskjellige Dobbeltpunkter, hvoraf en Potens er samme perspektiviske Transformation af 2den Orden.

I en saadan Gruppe maa der ikke forekomme perspektiviske Transformationer af højere end 2den Orden.

Vi have allerede set, at hvis en saadan Gruppe indeholder en Transformation A af $n$te Orden, eller n Transformationer, der have de samme Dobbeltpunkter, ville disse med tilhørende Samlinger udgjøre

$$\frac{n-1}{n} N, \quad \frac{n-1}{2n} N, \quad \frac{n-1}{3n} N$$

Transformationer, eftersom der ikke gives nogen anden Transformation i Gruppen, der ombytter Dobbeltpunkterne for en Transformation i Samlingen, eller der gives en Transformation, der ombytter to Dobbeltpunkter, men lader det tredie uforandret, eller der gives en Transformation, der kredsforskyder alle 3 Dobbeltpunkter.

Da $n-1$ er primisk med n, og Antallet af Transformationer i en Samling skal være et helt Tal, maa altsaa $\frac{N}{n}$ være et helt Tal, i de to sidst omtalte Tilfælde ses tillige $\frac{N}{2n}$ eller $\frac{N}{3n}$ at maatte være hele, dersom N er et Multiplum henholdsvis af 2 eller 3.

N maa saaledes være et Tal, der indeholder det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de Transformationer, Gruppen indeholder, som Faktor.

Betegnes ved $\Sigma\frac{n-1}{n}N$ Summen af Antallet af alle de Samlinger Transformationer, Gruppen indeholder, i hvilke ikke to Dobbeltpunkter for en Transformation i Samlingen ombyttes ved nogen anden Transformation hørende til Gruppen, o. s. v., ses det, at det samlede Antal Transformationer i Gruppen er bestemt ved

$$N\left(\Sigma\frac{n-1}{n}+\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}+\Sigma\frac{n_2-1}{3n_2}+\frac{q}{9}\right)+1=N, \tag{79}$$

idet q er Antallet af Samlinger i Gruppen bestaaende af Transformationer af 3die Orden, hvis to Dobbeltpunkter baade ombyttes ved en Transformation i Gruppen, og hvis Dobbeltpunkter alle tre kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Ligningen (79) kan ogsaa skrives

$$\frac{1}{N}=1-\Sigma\frac{n-1}{n}-\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}-\Sigma\frac{n_2-1}{3n_2}-\frac{q}{9}. \tag{80}$$

Da i højre Side af denne Ligning Nævneren i det højeste er mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de Transformationer, der indgaa i Gruppen, eller dette Tal multipliceret med 2, 3 eller 6, idet man tænker sig alle Brøkerne paa højre Side gjorte eensbenævnte, og efter udført Regning forkortede saa meget som muligt, har man følgende Sætning:

Antallet af Transformationer i en endelig Gruppe er det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de i Gruppen indgaaende Transformationer, eller dette Tal multipliceret med 2, 3 eller 6. Det ses tillige, at Faktorerne 2, 3 eller 6 til det mindste fælles delelige Tal kun kan forekomme, forsaavidt Gruppen indeholder Transformationer, for hvilke kun 2 Dobbeltpunkter ombyttes ved en Transformation i Gruppen, eller Transformationer for hvilke alle 3 Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen eller Transformationer af begge disse Arter. (81)

Hører der til Gruppen kun Transformationer, hvori intet Dobbeltpunkt ombyttes ved en anden Transformation eller højest 2 Dobbeltpunkter ombyttes, faa vi de samme Tal frem for Antallet af Transformationer i Gruppen og Antallet af Transformationer i Samlingerne, som vi allerede have faaet ved de endelige Grupper for den rette Linie. Vi ville derfor kun anstille Undersøgelser, for saa vidt Gruppen indeholder Transformationer, i hvilke alle tre Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Her følger nogle Antydninger af, hvorledes man ofte kan afgjøre Gruppernes Mulighed, idet i det følgende Gruppernes Umulighed, hvor de enkelte Tal tilfredsstille (80), kun vil blive nævnt, eller i det høieste Beviset kun antydet.

Et vigtigt Middel haves i Sætning (81). Hvis Gruppen ikke er cyklisk, maa den i det mindste indeholde to Transformationer af n^{te} Orden A og B med forskjellige Dobbeltpunkter, hvis den indeholder en saadan, idet i modsat Tilfælde alle Transformationer i Gruppen skulde lade A's Dobbeltpunkter uforandrede eller ombytte dem, saa at Gruppen mod Forudsætningen var cyklisk.

Har nu A og B forskjellige Dobbeltpunkter, ville

$$B,\ ABA^{-1},\ A^2BA^{-2}\ \ldots\ A^{n-1}BA^{-n+1}$$

være lutter forskjellige Transformationer, og to af dem kunne kun have samme Dobbeltpunkter, hvis A eller en af dens Potenser ombytter to eller alle tre Dobbeltpunkter for B. Gruppen vil da i de nævnte Tilfælde mindst komme til at indeholde, (da den foruden de nævnte Transformationer indeholder A), $n+1$, $\frac{n}{2}+1$ eller $\frac{n}{3}+1$ Transformationer af n^{te} Orden med forskjellige Dobbeltpunkter hørende til samme Samling, og Samlingen maa da mindst indeholde

$$(n-1)(n+1),\quad (n-1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ eller } (n-1)\left(\frac{n}{3}+1\right)$$

Transformationer, og da Antallet af Transformationer i Samlingen skal være

$$\frac{n-1}{n}N,\quad \frac{n-1}{2n}N \text{ eller } \frac{n-1}{3n},$$

maa N i de tre Tilfælde være lig eller større end

$$n(n+1),\quad n(n+2) \text{ eller } n(n+3).$$

Det ses tillige, at de sidste Tilfælde kun kunne indtræde, naar n er delelig med 2 eller 3.

44) Det ses, at en Gruppe i det høieste kan indeholde en Samling af Transformationer, hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes af nogen Transformation i Gruppen.

Ere disse Transformationer af 2^{den} Orden, kan Gruppen endnu indeholde en Samling Transformationer, for hvilke to Dobbeltpunkter ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen [1]).

Er denne anden Samling ogsaa af 2^{den} Orden, d. v. s. ere dens Transformationer af 2^{den} Orden, kunde Gruppen muligvis endnu indeholde enten 2 Samlinger Transformationer, af 3^{die} Orden, hvis Dobbeltpunkter baade kredsforskydes og ombyttes to og to ved andre Transformationer i Gruppen, eller een Samling Transformationer i Gruppen, hvis Dobbeltpunkter kan kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen. Man har da

[1]) Her og i det Følgende er Gjennemgangen af en Del Muligheder forbigaaet, der dog alle ses, ved lignende Fremgangsmaader som de brugte, ikke at høre til virkelige Grupper.

$$\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\frac{2N}{9}+1=N$$
$$N=36.$$

Gruppen ses imidlertid let at være umulig. Thi den skal indeholde 18 Transformationer af 2den Orden, der ikke ved nogen anden Transformation i Gruppen transformeres til sig selv. Men ere nu to af disse Transformationer A og B, kan man ikke have, at AB er af 2den Orden; thi da var $AB = BA$, $BAB = A$ imod Forudsætningen. AB maa da være en Transformation af 3die Orden og have et af sine Dobbeltpunkter paa A's Axe. Men da maa A og B ved Sammensætning danne en cyklisk Gruppe, hvis Transformationer transformere Forbindelseslinien mellem deres Centrer til sig selv, og da denne ikke indeholder Transformationer af højere end 3die Orden, kan endnu kun een Transformation af 2den Orden have sin Axe gaaende gjennem Skjæringspunktet for A og B's Axer. Der vil da i det mindste være 8 Transformationer af 3die Orden, der have Dobbeltpunkter paa forskjellige Steder af A's Axe; men Gruppen skal kun indeholde 4 Transformationer af 3die Orden med forskjellige Dobbeltpunkter, saa at dette er umuligt.

Vi ville derpaa undersøge, hvor vidt Gruppen kan indeholde en Transformation A af $n$te Orden, hvis Dobbeltpunkter ikke ombyttes ved nogen Transformation i Gruppen, og een eller flere Samlinger, indeholdende Transformationer, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Man skal have

$$\frac{1}{N}=1-\frac{n-1}{n}-\frac{n_2-1}{3n_2}-\frac{q}{9}=\frac{3-(n-3)(n_2-1)}{3nn_2}-\frac{q}{9},$$

hvor q er Antallet af Samlinger af Transformationer af 3die Orden, hvis Dobbeltpunkter baade kredsforskydes og ombyttes to og to.

Vi sætte først $n=2$, $n_2=3$. Vi have da, idet $q=2$,

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18},$$
$$N=18.$$

Gruppen skal indeholde 8 Transformationer af 3die Orden, 9 af 2den Orden. Hvis Gruppen existerer, maa den være cyklisk. Lad os dernæst antage $n_2>3$. n_2 maa da i det mindste være 7.

Man har da

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{2}-\frac{n_2-1}{3n_2}-\frac{1}{9}=\frac{n_2+6}{18n_2},$$

idet $q>1$ vilde gjøre Ligningen ubrugelig. Det ses imidlertid, at den fremkomne Ligning ogsaa er ubrugelig.

Er $n > 2$ maa enten Leddet indeholdende n_2 eller 9 bortfalde. Er $q = 0$, $n_2 > 3$, maa n være 3; Gruppen ses at være umulig, ifølge Slutningen af 43.

Er $n_2 = 3$, $q = 0$ faa vi

$$\frac{1}{N} = \frac{9-2n}{9n}, \text{ hvoraf altsaa } n \overline{\gtrless} 4.$$

Er $n = 3$ faas

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{9}, \quad N = 9,$$

Gruppen er umulig.

$n = 4$ giver $N = 36$, det skal senere vises, at denne Gruppe ikke existerer.

Er Leddet indeholdende n_2 faldet bort, faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{9-nq}{9n}.$$

n maa være af lige Orden, da der maa være Transformationer i Gruppen, som ombytte to Dobbeltpunkter for Transformationen af 3die Orden. Vi maa da sætte enten $n = 4$, $q = 2$, $N = 36$, hvilket giver, som senere skal vises, en virkelig Gruppe, eller $n = 8$, $q = 1$, $N = 72$. . . . . (82)

Denne sidste Gruppe existerer ikke. Dens Existens skal undersøges samtidig med de to forriges.

Hermed ere vi færdige med de Grupper, hvis Transformationer ikke have Dobbeltpunkter, der ombyttes ved nogen anden Transformation i Gruppen.

45) Vi ville nu behandle saadanne Grupper, der indeholde lutter Transformationer, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved andre Transformationer hørende til Gruppen.

Vi skulle da have

$$1 - \Sigma\frac{n-1}{3n} - \frac{q}{9} = \frac{1}{N}.$$

Vi kunne her lade q være 1 eller 0. Grupperne kunne i det højeste indeholde to Samlinger Transformationer, der ikke ere af 3die Orden.

Thi havde man 3 Samlinger, fik man

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{3n} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9} = \frac{nn_1 + nn_2 + n_1n_2}{3nn_1n_2} - \frac{q}{9}.$$

Er $q = 0$ faar man

$$N = \frac{3nn_1n_2}{nn_1 + nn_2 + n_1n_2},$$

som altid er mindre end det højeste af Tallene n, n_1, n_2 og altsaa umulig (her ligegyldigt om et eller flere af Tallene er 3).

Er $q = 1$ faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{-27 + 9(n + n_1 + n_2) - (n-3)(n_1-3)(n_2-3)}{9 n n_1 n_2},$$

som er umulig, da Tælleren er mindre end 0, med mindre $n = n_1 = n_2 = 7$, som er ubrugelig da $\frac{1}{N} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}$, eller $n = 12$, $n_1 = n_2 = 7$, som vilde give $N = 84$, der er ubrugelig, da 9 skal gaa op i N.

Vi kunne altsaa i det højeste have to af disse Tal forskjellige fra 3, og kunne altsaa sætte

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{2}{9} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2} - \frac{1}{9} = \frac{n_1 + n_2}{3 n_1 n_2},$$

der ligesom før ses at være ubrugelig[1]).

Man kunde endelig forsøge at danne Grupper, der kun indeholdt to Samlinger Transformationer, hvis Dobbeltpunkter bleve kredsforskudte ved en anden Transformation i Gruppen, foruden muligvis endnu en Samling, bestaaende af Transformationer af 3die Orden, hvis Dobbeltpunkter baade bleve kredsforskudte og ombyttede. Tilfældet vilde stille sig endnu ugunstigere end det foregaaende.

En endelig Gruppe kan da ikke bestaa af lutter Transformationer, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved andre Transformationer i Gruppen.

46) Vi behøve da nu kun at undersøge Grupper, der dels indeholde Transformationer, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen, dels Transformationer, for hvilke Dobbeltpunkterne ombyttes to og to.

Vi sætte da

$$\frac{1}{N} = 1 - \Sigma \frac{n-1}{2n} - \Sigma \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{q}{9}.$$

Vi skulle nu undersøge, hvor naar denne Ligning kan være tilfredsstillet.

Det er klart, at her kan i det højeste være 3 Samlinger af Transformationer, for hvilke kun to Dobbeltpunkter ombyttes. Det ses endvidere, at af disse Samlinger maa de to indeholde Transformationer af 2den Orden, den tredie kan indeholde Transformationer af 2den, 3die eller 4de Orden.

Lad os antage, at Gruppen skal indeholde 3 Samlinger Transformationer af 2den Orden. Man skal da have

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{q}{9} = \frac{9 - 4q}{36},$$

[1]) Det ses let, at Gruppen ikke kan indeholde 4 Samlinger Transformationer, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation, med mindre disse Transformationer alle ere af 3die Orden, i hvilket Tilfælde Gruppen er cyklisk.

man maa da have $q = 2$, $N = 36$. Det ses let, at Gruppen er umulig. Der skulde være 27 Transformationer af 2den Orden, 8 af 3die i Gruppen. Der er nemlig ikke nogen Transformation af 3die Orden B, som har Dobbeltpunkt fælles med Centrum for en Transformation af 2den Orden A. Enhver Transformation A maa derfor transformere B hen til en ny Transformation af 3die Orden. Lad os nu antage, at A ikke ombytter B's Dobbeltpunkter, saa maa den transformere et af B's Dobbeltpunkter P hen til et andet Dobbeltpunkt P_1, og Antallet af Transformationer af 2den Orden viser, at der i det mindste maa være endnu en Transformation C af 2den Orden, som transformerer P til P_1. AC har da Dobbeltpunkterne P og P_1, maa være af 2den Orden og ombytte to Dobbeltpunkter for B. Det ses da, at den Samling, hvortil B hører, kun indeholder 4 Transformationer med 6 Dobbeltpunkter. Men da maa der være mindst 6 Transformationer af 2den Orden, der transformere P til P_1, og altsaa mindst 5 saadanne, der have Axer gaaende gjennem P og P_1, hvad der er umuligt.

Indeholdt Gruppen 2 Samlinger Transformationer af 2den Orden, een af 3die Orden, maatte man have

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{q}{9}$$

$q = 1$, $N = 18$, som er umulig, da N skal være et Multiplum af 4.

Skulde Gruppen indeholde 2 Samlinger Transformationer af 2den Orden, een af 4de Orden, fik man

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{q}{9},$$

$q = 1$, $N = 72$. Gruppens Umulighed bevises som i næstforrige Tilfælde.

47) Vi antage nu, at der er to Samlinger i Gruppen, for hvilke kun to Dobbeltpunkter i Transformationerne ombyttes. Vi faa da

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1 - 1}{2n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2} - \frac{q}{9}{}^{*)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{3n_2} - \frac{q_1}{9}, \tag{83}$$

hvor $\frac{q_1}{9} = \frac{q}{9} + \frac{1}{3}$, saa at $q \gtreqless 3$.

Lad os først sætte $n = 2$. Man faar da

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{3n_2} - \frac{q_1}{9} = \frac{9n_1 n_2 + 18n_2 + 12n_1 - 4q_1 n_1 n_2}{36 n_1 n_2}.$$

Sætte vi $q_1 = 3$ faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{24 - (n_1 - 6)(n_2 - 4)}{12 n_1 n_2}$$

*) $\frac{q}{9} N$ angiver her hele Antallet af Transformationer af 3die Orden, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en Transformation i Gruppen.

$$n_1 > 6, \quad n_2 > 4\,,$$

da ellers N ligeledes blev mindre, end den efter 43) kan være.

Man maa tillige have

$$24 > (n_1 - 6)(n_2 - 4) \geqq 12.$$

Man kan da sætte n_2 lig med

$$7, \ 12, \ 13, \ 19, \ 21.$$

Er $n_2 = 7$, faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{14 - n_1}{28 n_1},$$

hvor 3 maa gaa op i n_1, hvoraf ses, at Ligningen er umulig. Paa samme Maade ses det, at $n_2 = 13$, $n_2 = 19$ ere ubrugelige.

$n_2 = 12$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - n_1}{18 n_1};$$

man maa have $n_1 = 8$. Gruppen kan imidlertid ikke existere ifølge samme Ræsonnement som i 46).

$n_2 = 21$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{24 - (n_1 - 6)\,17}{12 \,.\, 21 \,.\, n_1};$$

man maatte have $n_1 = 7$, $N = 12 \,.\, 21$, som er umulig paa Grund af Slutningen af 43).

Sætter man i (83) $q_1 = 4$, $n = 2$, faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{18 n_2 + 12 n_1 - 7 n_1 n_2}{36 n_1 n_2}.$$

Satte man her $n_2 = 3$, den mindste Værdi den kan have, fik man

$$\frac{1}{N} = \frac{6 - n_1}{12 n_1}.$$

Da 9 skal gaa op i Nævneren, maa n_1 være et Multiplum af 9, og Ligningen er ubrugelig.

Satte man $n_1 = 2$, fik man

$$\frac{1}{N} = \frac{n_2 + 6}{18 n_2},$$

som umiddelbart ses at være ubrugelig, da Nævneren skal være et Multiplum af 4, n_2 lige, og altsaa mindst lig 12. (Anvend ligesom før Slutningen af 43)).

$n_1 = 3$ vilde give

$$\frac{1}{N} = \frac{12 - n_2}{36 n_2},$$

hvor n_2 da maa være 3 eller 7, som begge ses at være ubrugelige. Vi kunne da ikke have $n_1 = 3$. Man kan sætte

$$\frac{1}{N} = \frac{6\,(6 - (n_1 - 3)\,(n_2 - 2)) - n_1\,n_2}{36\,n_1\,n_2},$$

og da n_1 og n_2 skulle være større end 3, behøver man i det højeste at sætte $n_2 = 7$. Dette er da den eneste Værdi vi behøve at undersøge. Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{126 - 37\,n_1}{36\,.\,7\,.\,n_1},$$

som ses ikke at være tilfredsstillet for nogen Værdi af n_1. Vi se saaledes, at der ikke existerer Grupper, for hvilke en Samling henhører til en Transformation af 2den Orden.

Vi kunne da lade n og n_1 mindst være 3.

Vi sætte nu $n = 3$. Man har da ifølge (83)

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{3n_2} - \frac{q_1}{9},$$

hvor man maa have $q_1 \overline{\gtrless} 3$.

Vi sætte da, hvis $q_1 = 3$,

$$\frac{1}{N} = \frac{6 - (n_1 - 3)\,(n_2 - 2)}{6\,n_1\,n_2}.$$

Det ses strax, at $n_1 = 3$ er umulig.

Sætter man $n_1 = 4$, $n_2 = 7$ faas derimod en virkelig existerende Gruppe, for hvilken

$$\underline{\underline{N = 168.}} \tag{84}$$

Denne skal senere behandles.

Sættes $n_2 = 3$, kan man sætte $n_1 = 8$, 6 eller 4, da n_1 maa være et lige Tal. Det ses let, at intet af disse Tal kan bruges. $n_1 = 8$ vilde give $N = 144$; men ses let at være ubrugelig, da Gruppen skulde indeholde 9 Transformationer af 8de Orden, hvis Dobbeltpunkter ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen, og ogsaa kun 9 Transformationer af 2den Orden (smlgn. S. 167).

Er $q_1 = 4$, $n = 3$ faas af (83)

$$\frac{1}{N} = \frac{9\,n_2 + 6\,n_1 - 5\,n_1\,n_2}{18\,n_1\,n_2},$$

en Ligning, som er umulig, da n_1 og n_2 begge ere lig eller større end 3, saa at Tælleren paa højre Side er 0 eller negativ.

Ere endelig n og n_1 begge større end 3, saa er

$$\frac{n-1}{2n} + \frac{n_1 - 1}{2\,n_1} \geqq \frac{3}{4},$$

Gruppen kan ikke endnu indeholde andre Samlinger end Samlinger af 3die Orden, hvis Transformationer have Dobbeltpunkter, der kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Man kan sætte $q = 1$, eller $q = 2$ og faar

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1 - 1}{2n_1} - \frac{q}{9} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n_1} - \frac{q}{9} = \frac{9(n+n_1) - 2qnn_1}{18nn_1}. \tag{85}$$

Lad os sætte $q = 2$, saa faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{9(n+n_1) - 4nn_1}{18nn_1}.$$

Disse Tal, n og n_1, kunne ikke begge være større end 4. Vi kunne da sætte $n = 4$. Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{36 - 7n_1}{72n_1}.$$

Er her $n_1 = 4$ faar man $N = 36$, som er umulig, da N skal være et Multiplum af 8.

Er $n_1 = 5$, faar man derimod $N = 360$, en virkeligt existerende Gruppe, som senere skal behandles. . . . . (86)

Er $q = 1$ har man

$$\frac{1}{N} = \frac{9(n+n_1) - 2nn_1}{18nn_1}.$$

Her maa man have det største af Tallene mindst lig 9, da N ellers efter 43) kommer til at indeholde for faa Transformationer. Man har da, hvis $n = 9$,

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - n_1}{18n_1},$$

hvor n_1 skal være lige. Er $n_1 < 8$ ses Gruppen at indeholde for faa Transformationer efter 43), og er $n_1 = 8$ faas $N = 144$, der (ligesom S. 167) ses at være umulig.

Er $n = 8$ faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{72 - 7n_1}{144n_1};$$

her ses $n_1 = 10$ at være det eneste brugelige Tal. Dette vilde give $N = 720$.

Hvis Gruppen existerede, maatte den indeholde to Transformationer af 10de Orden A og B, saa at A^5 ombytter to Dobbeltpunkter for B^5 og omvendt, da der existerer 36 Transformationer som A med forskjellige Sæt Dobbeltpunkter. A og B vilde da transformere samme Keglesnit til sig selv, og ses let ikke at kunne tilhøre en endelig Gruppe.

Er $n = 7$ faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{63 - 5n_1}{126n_1},$$

hvor n_1 skal være lige. Man maa da sætte $n_1 = 12$, $N = 18.7.4$.

Umuligheden af Gruppen kan vises ligesom i foregaaende Tilfælde.

Lavere Værdier af n_1 kan ikke bruges som Følge af 43).

Er $n = 6$ faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{18 - n_1}{36n_1}.$$

Man kan her sætte $n_1 = 17$ og faar da $N = 36 . 17$. Umuligheden af Gruppen bevises ligesom i forrige Tilfælde.

Paa lignende Maade ses, at man heller ikke kan have $n_1 = 16$, medens Umuligheden af lavere Værdier for n_1 følger af 43.

For $n = 5$ faas

$$\frac{1}{N} = \frac{45 - n_1}{90 . n_1},$$

hvor n_1 skal være lige. Paa lignende Maade som i de forrige Tilfælde vises, at $n_1 = 44$ er ubrugelig, og lavere Værdier kunne ikke bruges ifølge 43).

$n = 4$ vilde give

$$\frac{1}{N} = \frac{36 + n_1}{18 n n_1},$$

som umiddelbart ses at være ubrugelig.

47) Vi komme nu endelig til den sidste Mulighed, at Gruppen kan indeholde een Samling af Transformationer, for hvilke to Dobbeltpunkter ombyttes, i Forbindelse med flere for hvilke der er cyklisk Ombytning af Dobbeltpunkterne.

Vi have da

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2} - \frac{q}{9}, \tag{87}$$

idet vi antage, at Gruppen indeholder $\frac{q}{9}N$ Transformationer af 3die Orden med cyklisk Ombytning af Dobbeltpunkterne.

Vi sætte først $n = 2$, og faa da

$$\frac{1}{N} = \frac{3}{4} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2} - \frac{q}{9} = \frac{3n_1 n_2 + 12(n_1 + n_2) - 4q n_1 n_2}{36 n_1 n_2}, \tag{88}$$

hvor man enten kan have $q = 1$ eller $q = 2$.

Vi sætte først $q = 1$. Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{144 - (n_1 - 12)(n_2 - 12)}{36 n_1 n_2},$$

hvor man maa have

$$144 - (n_1 - 12)(n_2 - 12) < 36,$$
$$(n_1 - 12)(n_2 - 12) > 108,$$

da ellers Gruppen ifølge 43) kommer til at indeholde for faa Transformationer. Ligeledes maa man have

$$(n_1 - 12)(n_2 - 12) < 144.$$

En af Størrelserne, n_1 eller n_2, maa altid være mindre end 24, og vi se, at ingen af dem kan være mindre end 12. Man kan da sætte

$$n_1 = \begin{cases} 13 \\ 19 \\ 21. \end{cases}$$

For $n_1 = 13$ faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{156 - n_2}{36.13.n_2}.$$

Man ser umiddelbart, at $n_2 > 120$, og da ifølge 43) $N > n_2(n_2 + 1)$, kan man i det højeste forkorte Brøken paa højre Side med 3. Vi have da

$$156 > n_2 \geqq 153,$$

og se da, at vi ikke kunne bruge noget af de mellem 156 og 153 liggende Tal, da de indeholde Primfaktorer af Formen $3p + 2$.

Vi sætte da $n_1 = 19$ og faa

$$\frac{1}{N} = \frac{228 - 7n_2}{36.19.n_2}.$$

Man skal her have $228 > 7n_2$, $33 > n_2$, og da Tælleren sikkert skal være mindre end 36, $7n_2 > 192$, $n_2 > 27$. Man behøver da kun at undersøge $n_2 = 28$ og 31, som begge vise sig at være ubrugelige.

Vi sætte dernæst $n_1 = 21$. Man faar da

$$\frac{1}{N} = \frac{28 - n_2}{4.21.n_2}.$$

Da 9 skal gaa op i N, maa 3 gaa op i n_2, og da n_2 maa være større end 24, ses det, at ingen Værdi af n_2 kan bruges.

Vi sætte dernæst $q = 2$ i (88) og have da

$$\frac{1}{N} = \frac{12(n_1 + n_2) - 5n_1 n_2}{36 n_1 n_2}.$$

De mindste Værdier n_1 og n_2 kunne have ere 3 og 7, og det ses, at naar de begge ere 7, er Tælleren paa højre Side negativ, hvad der da ogsaa maa finde Sted for højere Værdier af n_1 og n_2.

Vi behøve da kun at prøve $n_1 = 3$, som giver

$$\frac{1}{N} = \frac{12 - n_2}{12.3.n_2},$$

som ses ikke at give nogen brugelig Værdi for n_2.

Vi sætte dernæst i (87) $n = 3$ og faa da

$$\frac{1}{N} = \frac{3n_1 + 3n_2 - qn_1 n_2}{9n_1 n_2},$$

hvor n_1 eller n_2 maa være lige, altsaa mindst lig 12. q maa da være 1. Vi faa

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - (n_1 - 3)(n_2 - 3)}{9n_1 n_2},$$

som ses at være ubrugelig i alle Tilfælde.

Er $n > 3$ maa i (87) enten q være 0, eller et af Leddene indeholdende n_1 eller n_2

mangle, idet disse Størrelser antages forskjellige fra 3. Lad os antage $q = 0$, saa ere n_1 og n_2 mindst 7, og man maa da have

$$\frac{1}{N} \overline{\gtrless} \frac{3}{7} - \frac{n-1}{2n} > 0,$$

altsaa $n < 7$.

Lad os prøve de forskjellige Værdier, n kan have, 4, 5, 6, idet da i de 2 første Tilfælde en af Størrelserne n_1 eller n_2 maa være et Multiplum af 3.

$n = 4$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{5}{8} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2},$$

hvor ikke baade n_1 og n_2 kunne være større end 16. Man har nemlig

$$\frac{1}{N} = \frac{8(n_1 + n_2) - n_1 n_2}{24 n_1 n_2} = \frac{64 - (n_1 - 8)(n_2 - 8)}{24 n_1 n_2},$$

og da 3 skal gaa op i en af dem, kan man sætte $n_1 = 12$, som giver

$$\frac{1}{N} = \frac{24 - n_2}{72 . n_2}.$$

Den eneste brugelige Værdi her, er muligvis $n_2 = 21$, da de andre Værdier ses umiddelbart at maatte forkastes. Imidlertid ses denne ogsaa at være ubrugelig, da man faar $N = 21 . 24$. Der skal i Gruppen være Transformationer af 6te Orden med 14 forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, hvis Dobbeltpunkter kunne kredsforskydes, men hvor ikke to Dobbeltpunkter henhørende til samme Transformation kunne ombyttes. Men da der til Gruppen hører Transformationer af 4de Orden og 4 ikke gaar op i 14, maa dette netop ske, da en Transformation af 4de Orden ikke kan kredsforskyde Dobbeltpunkterne.

$n = 5$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{3}{5} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2} = \frac{5(n_1 + n_2) - n_1 n_2}{15 n_1 n_2},$$

som ses ikke at kunne bruges i noget Tilfælde.

$n = 6$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{7}{12} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{n_2 - 1}{3n_2} = \frac{4(n_1 + n_2) - n_1 n_2}{12 n_1 n_2},$$

som ses kun at give en mulig Værdi for N, naar $n_1 = n_2 = 7$, i hvilket Tilfælde $N = 84$. Gruppen vil kun indeholde 7 Transformationer af 2den Orden og Umuligheden bevises som flere Steder før (smlgn. S. 167).

Er $n > 3$, $q > 0$, kan der i (87) kun forekomme et af Leddene indeholdende n_1 eller n_2, og vi sætte

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1 - 1}{3n_1} - \frac{q}{9} = \frac{3nn_1 + 9n_1 + 6n - 2qnn_1}{18nn_1}, \tag{89}$$

hvor vi kun behøve at give q Værdierne 2 eller 3.

$q = 2$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{9n_1 + 6n - nn_1}{18nn_1} = \frac{54 - (n-9)(n_1-6)}{18nn_1}.$$

En af Størrelserne n og n_1 maa være lige, og man maa have

$$36 \overline{\overline{<}} (n-9)(n_1-6) < 54,$$

den første Ulighed ifølge 43).

n_1 er mindst 7, og man skulde da prøve for n_1 Værdierne mellem 7 og 59, nemlig

7, 12, 13, 19, 21, 28, 31, 37, 39, 43, 49, 52, 57.

Vi sætte da først $n_1 = 7$, som giver

$$\frac{1}{N} = \frac{63 - n}{18 . 7 . n},$$

hvor n skal være lige, og da man skal have

$$N \overline{\overline{>}} n(n+1),$$
$$126 \overline{\overline{>}} (n+1)(63-n),$$
$$n^2 - 62n + 63 \overline{\overline{>}} 0,$$

ses, at n kun kan være 62. Gruppen ses at være umulig ligesom S. 167 o. fl. St.

$n_1 = 12$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{18 - n}{36n}.$$

Vi behøve her kun at prøve $n = 17$ eller $n = 16$. Umuligheden vises som i forrige Tilfælde.

$n_1 = 13$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{54 - (n-9)7}{18 . 13 . n}.$$

n skal være lige, man faar ingen brugelige Værdier.

$n_1 = 19$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{54 - 13(n-9)}{18nn_1},$$

hvor n ligeledes skal være lige. Man faar ingen brugelige Værdier af n.

$n_1 = 21$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{18 - (n-9)5}{6nn_1},$$

hvor n ogsaa skal være lige, i det højeste lig 12. For $n = 12$ faas $N = 24 . 21$. Umuligheden af Gruppen bevises atter som S. 167.

$n_1 = 28$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{27 - (n-9)11}{18 . 28 . n}.$$

Det ses, at ingen Værdi af n kan bruges.

$n_1 = 37$ giver

$$\frac{1}{N} = \frac{54 - 31(n-9)}{18 \,.\, 37 \,.\, n}$$

ubrugelig. Paa samme Maade ses alle de følgende Værdier at være ubrugelige. Den eneste Værdi, der muligvis kan bruges er $n_1 = 57$, $n = 10$, som giver $N = 57 \,.\, 60$.

Gruppen er imidlertid umulig. Den skulde indeholde 20 forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, hvortil hørte Transformationer af 57de Orden, og 19de Potens A af enhver saadan Transformation af 57de Orden vilde da være af 3die Orden og ombytte Dobbeltpunkterne for enhver anden Transformation B af 57de Orden, der ikke hørte til de samme Dobbeltpunkter. Men da vilde AB^m være af 3die Orden og Gruppen indeholde mindst $19 \,.\, 56$ saadanne Transformationer; medens den efter Tallene kun skulde indeholde $19 \,.\, 40$ Transformationer af 3die Orden, der ikke havde samme Dobbeltpunkter som Transformationer af 57de Orden og 20 Transformationer, der havde saadanne Dobbeltpunkter.

Vi sætte dernæst i (89) $q = 3$ og faa da

$$\frac{1}{N} = \frac{3n_1 + 2n - nn_1}{6nn_1} = \frac{6 - (n-3)(n_1 - 2)}{6nn_1},$$

som ses at være umulig, hvis baade n og n_1 ere større end 3.

Sættes $n_1 = 3$ har man

$$\frac{1}{N} = \frac{9-n}{18n},$$

hvor n skal være et lige Tal, og da maa være 6 eller 8.

I første Tilfælde var $N = 36$, Gruppen skulde kun indeholde tre forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, hvortil hørte Transformationer af 6te Orden, hvad der er umuligt.

I andet Tilfælde skulde Gruppen indeholde 144 Transformationer. Der skulde være kun 9 Sæt Dobbeltpunkter, hvortil hørte Transformationer af 8de Orden, hvad der ogsaa ses at være umuligt.

48) Vi ville nu gaa over til virkeligt at bestemme alle de existerende Grupper, idet her dog stadigt kun tages Hensyn til saadanne Grupper, i hvilke ikke alle Transformationerne transformere samme rette Linie til sig selv.

Vi kunne antage en saadan Transformation bragt paa Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y, \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{hvor } \alpha\beta\gamma = 1\,,$$

saa vil den transformere et Keglesnit til sig selv, hvis en af Multiplikatorerne er 1, og i saa Tilfælde vil der være uendelig mange Keglesnit, som blive transformerede til sig selv.

Skal nemlig Keglesnittet

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy = 0$$

transformeres til sig selv, maa man have

$$a\alpha^2 = \rho a, \quad b\beta^2 = \rho b, \quad c\gamma^2 = \rho c,$$
$$d\bar{\alpha} = \rho d, \quad e\bar{\beta} = \rho e, \quad f\bar{\gamma} = \rho f,$$

hvor i det mindste to af Størrelserne a, b, c, d, e, f, maa være forskjellige fra 0. Men hertil kræves enten, at A er perspektivisk, eller at en af Multiplikatorerne er 1. Vi antage nu, $\alpha = 1$ [1]) og at A ikke er perspektivisk. Man kan da lade a og d være vilkaarlige Størrelser, medens de øvrige ere 0.

Keglesnittet faar Ligningen

$$ax^2 + dyz = 0,$$

og ses at være et Keglesnit, der gaar gjennem de to Dobbeltpunkter Q og Q_1 og rører de to Dobbeltlinier q og q_1 i disse Punkter.

For at den ene Multiplikator skal være 1, ses det at være nødvendigt og tilstrækkeligt, at Diagonalsummen er reel, og for at de andre Multiplikatorer skulle være Rødder af Enheden, at den ligger mellem Grænserne 3 og -1, idet det antages, at Transformationsdeterminantens Elementer ere konjugerede med deres Underdeterminanter.

Man ser nemlig, naar Diagonalsummen s er reel, at Multiplikatorerne ere bestemte ved Ligningen

$$\mu^3 - s\mu^2 + s\mu - 1 = 0$$

eller

$$(\mu - 1)(\mu^2 - (s-1)\mu + 1) = 0,$$

hvoraf Rigtigheden af det fremsatte ses [2]).

49) Er en Transformation af 2den Orden, kan det vises, at Elementerne i dens Diagonalrække maa være reelle Tal, og tillige, at dette er den tilstrækkelige Betingelse for, at den er af 2den Orden i Forbindelse med, at Diagonalsummen er -1 og de øvrige Betingelser, Transformationerne maa opfylde for at høre til en endelig Gruppe. Skal nemlig A være af 2den Orden, maa man have

$$A \equiv A^{-1}.$$

Idet vi her kun opskrive Determinanterne, har man da

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha^p \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{vmatrix}, \quad \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

[1]) eller α^p, hvor $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

[2]) Man kunde her for s sætte $s\alpha^p$, hvor $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

og altsaa $$a_1 = \alpha^p \bar{a}_1$$
eller $$\alpha^p a_1 = \bar{\alpha}^p \bar{a}_1 ,$$

og, da a_1 kun er bestemt paa en Faktor α^p nær, kunne vi sætte

$$a_1 = \bar{a}_1 ,$$

som viser, at a_1 er reel. Paa samme Maade faas $b_2 = \bar{b}_2$, $c_3 = \bar{c}_3$ reel at være nødvendige Betingelser.

Vi have nu

$$a_1 + b_2 + c_3 = -1$$

og ifølge S. 141, som Følge af, at a_1, b_2, c_3 ere reelle,

$$b_1 a_2 = a_1 b_2 - c_3 = (a_1 + 1)(b_1 + 1),$$

da

$$-c_3 = a_1 + b_2 + 1.$$

Paa samme Maade faas

$$c_1 a_3 = (c_3 + 1)(a_1 + 1)$$
$$c_2 b_3 = (b_2 + 1)(c_3 + 1),$$

og altsaa $$b_1 c_2 a_3 \;.\; c_1 a_2 b_3 = (a_1 + 1)^2 (b_2 + 1)^2 (c_3 + 1)^2 ,$$
medens $$b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 = 2(a_1 + 1)(b_2 + 1)(c_3 + 1).$$ (Se S. 141)

Man maa da have $R = 0$, og selvfølgelig $c_1 C_1 = a_3 A_3$ o. s. v., altsaa $|c_1| = |a_3|$, og da Produktet $c_1 a_3$ er reelt positivt,

$$c_1 = \bar{a}_3 ,$$

hvorved Sætningen bevises.

50) Vi skulle nu udvikle en Sætning om Afhængigheden mellem forskjellige Diagonalsummer i Gruppen, der vil være af Vigtighed for det følgende.

Lad os antage, at Gruppen indeholder to Transformationer, A og B,

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y , \qquad \text{hvor } \alpha\beta\gamma = 1 \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$$

og

$$B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z , \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

og at vi danne Diagonalsummerne for B, AB, A^2B ..., saa ere disse

$$\begin{aligned}
a_1 + b_2 + c_3 &= s \\
\alpha a_1 + \beta b_2 + \gamma c_3 &= s_1 \\
\alpha^2 a_1 + \beta^2 b_2 + \gamma^2 c_3 &= s_2 \\
\alpha^3 a_1 + \beta^3 b_2 + \gamma^3 c_3 &= s_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\
\alpha^p a_1 + \beta^p b_2 + \gamma^p c_3 &= s^p ,
\end{aligned}$$

hvor s_1, s_2 ... maa være mulige Diagonalsummer for Gruppen, d. v. s. kunne tilhøre saadanne Transformationer, der kunne forekomme i Gruppen.

En af dem, s, kan gives en Værdi, som vi vide maa forekomme blandt Diagonalsummerne til Gruppens Transformationer.

Elimineres a_1, b_2, c_3 mellem de fire første Ligninger, faas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ \alpha & \beta & \gamma & s_1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & s_2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & s_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Betegnes nu Diagonalsummen for A ved d, kan denne Ligning efter Division med $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$, som ikke kan være 0, naar A ikke er perspektivisk, skrives

$$s - s_3 = s_1 \bar{d} - s_2 d ,$$

og paa samme Maade faar man for 4 paa hinanden følgende Diagonalsummer

$$s^p - s^{p+3} = s^{p+1} \bar{d} - s^{p+2} d , \tag{90}$$

en Ligning, der er af den største Vigtighed for Bedømmelsen af de mulige Grupper.

Er B af 2den Orden, er $s = -1$, og ifølge foregaaende Paragraf, $s^p = \overline{s^{n-p}}$, naar A er af $n$te Orden.

51) Vi ville nu gjennemgaa de forskjellige existerende endelige Grupper, idet vi inddele dem efter Ordenen af Transformationerne af højest Orden indgaaende i Grupperne og sige, at en Gruppe er af samme Orden som Transformationen af højest Orden indgaaende i den.

Vi begynde da med Grupperne af 3die Orden.

Grupperne skulle indeholde Transformationer af 2den og 3die Orden, og vi kunne antage, at en Gruppe indeholder Transformationerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y , \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \quad \text{hvor } \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_1 x + b_2 y + c_2 z , \\ \mu z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{cases}$$

hvor vi antage, at B er af 2den Orden og alle Størrelserne a_1, b_1, c_1 ... reelle, idet det er let at se, at vi altid kunne bringe een Transformation af 2den Orden, hørende til Gruppen paa en saadan Form.

Vi maa da have

$$a_1 + b_2 + c_3 = -1$$
$$a_1 + \alpha b_2 + \bar{\alpha} c_3 = 0$$
$$a_1 + \bar{\alpha} b_2 + \alpha c_3 = 0,$$

idet venstre Side af de to sidste Ligninger skal være konjugerede Størrelser, og ikke kunne være lig $-\alpha^p$ og $-\bar{\alpha}^p$, da der saa vilde forekomme Transformationer af 2den Orden, der ombyttede A's Dobbeltpunkter (smlgn. S. 107).

Heraf faas

$$a_1 = b_2 = c_3 = -\tfrac{1}{3}$$
$$b_1 = c_1 = c_2 = \tfrac{2}{3},$$

saa at man faar

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \mu y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \mu z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z. \end{cases}$$

Alle Transformationer i Gruppen ville lade Keglesnittet

$$x^2 + 2yz = 0$$

uforandret, da A og B gjøre dette.

Gruppens Endelighed bevises let herved.

Vi se nemlig, at en lineær Transformation, der transformerer et Keglesnit til sig selv, altid vil transformere et Punkt P til et Punkt P_1, saaledes at det anharmoniske Forhold mellem QQ_1 PP_1 bliver lig med en af Multiplikatorerne[1]).

Vi se da, at vi kunne betragte de Grupper, i hvilke alle Transformationer transformere samme Keglesnit til sig selv, som en ikke lineær Transformation af de Grupper, der lade en ret Linie uforandret.

Invertere vi nemlig om et vilkaarligt Punkt som Inversionscentrum, vil den rette Linie gaa over til en Cirkel, og da de anharmoniske Forhold mellem Punkterne af den rette Linie blive lig med de anharmoniske Forhold mellem de tilsvarende Punkter af Cirklen, vil der til enhver lineær Transformation af den rette Linie svare en lineær Transformation af Cirklen, og til en endelig Gruppe lineære Transformationer af den rette Linie svare en endelig Gruppe lineære Transformationer af Cirklen.

Men den Gruppe, som er endelig for Cirklen, er ogsaa endelig for hele Planet.

Thi en hvilkensomhelst ret Linie vil ved alle Transformationer i Gruppen kun kunne transformeres til et endeligt Antal andre Linier, da dens Skjæringspunkter med Cirklen kun kunne transformeres til et endeligt Antal andre Punkter af Cirklen.

Men da et vilkaarligt Punkt af Planet kan opfattes som Skjæringspunkt mellem to rette Linier, maa ogsaa et vilkaarligt Punkt af Planet kun kunne transformeres til et endeligt Antal andre Punkter.

[1]) idet her bruges samme Betegnelser som S. 183.

Ved lineær Transformation kan man imidlertid faa en Cirkel transformeret til et vilkaarligt Keglesnit. Det ses saaledes, at man kun behøver at kjende alle endelige lineære Transformationsgrupper for den rette Linie, for at bestemme alle endelige Grupper for Planet, naar alle Transformationer i en saadan Gruppe skulle transformere samme Keglesnit til sig selv.

Den fundne Gruppe ses nu at svare til Tetraedergruppen for den rette Linie, og dens Endelighed kan bevises paa samme Maade.

Vi kalde den Tetraedergruppen for Planet.

52) Vi komme dernæst til Grupperne af 4de Orden. De skulle indeholde Transformationer af 2den, 3die og 4de Orden.

De mulige Diagonalsummer ere $-\alpha^p$, 0, α^p.

Vi kunne altid, ligesom i forrige Tilfælde, antage, at Gruppen indeholder to Transformationer A og B, hvoraf A er af 4de Orden med Dobbeltpunkter i Koordinatsystemets Begyndelsespunkter, B af 2den Orden med lutter reelle Koefficienter. Vi have da

$$a_1 + b_2 + c_3 = -1$$

og enten a)

$$a_1 + ib_2 - ic_3 = 0,$$

og altsaa

$$a_1 - ib_2 + ic_3 = 0,$$

og ifølge (90), da $d = 1$ $(= 1 - i + i)$,

$$a_1 - b_2 - c_3 = 1,$$

eller b)

$$\begin{aligned} a_1 + ib_2 - ic_3 &= \alpha^p \\ a_1 - b_2 - c_3 &= 0, \quad p = \begin{cases} 1 \\ 2, \end{cases} \\ a_1 - ib_2 + ic_3 &= \bar{\alpha}^p \end{aligned}$$

hvor a) og b) hver svare til sin Gruppe. Den første til en Gruppe paa 24 Transformationer, der er en Transformation af Oktaedergruppen; den anden til den S. 172 (82) svarende Gruppe paa 36 Transformationer.

53) Vi behandle nu først a), idet vi bruge lignende Betegnelser som i 51). Man faar

$$a_1 = 0, \quad b_2 = c_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \tfrac{1}{2},$$

saa at man faar

$$B = \begin{cases} \mu x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y + \dfrac{\sqrt{2}}{2} z \\ \mu y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x - \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{2} z \\ \mu z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x + \tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} z. \end{cases}$$

Da A og B lade Keglesnittet

$$x^2 + 2yz = 0$$

uforandret, ville alle Transformationer i Gruppen gjøre det. Gruppen er en Transformation af Oktaedergruppen for den rette Linie. Vi ville kalde den Oktaedergruppen for Planet.

54) Vi gaa nu over til at betragte den Gruppe vi faa ved at antage, at Multiplikationen af B med Potenser af A giver Rækken af Diagonalsummer b). Man faar da, idet vi sætte $p = 1$,

$$a_1 = -\tfrac{1}{2}, \qquad b_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}, \qquad c_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4}$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{3}{8}},$$

saa at altsaa

$$B = \begin{cases} \mu x' = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}}\,y + \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{8}}\,z \\[2ex] \mu y' = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}}\,x + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}\,y + \sqrt{\dfrac{3}{8}}\,z \\[2ex] \mu z' = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{8}}\,x + \sqrt{\dfrac{3}{8}}\,y + \dfrac{-1-\sqrt{3}}{4}\,z\,. \end{cases}$$

Vi skulle nu vise Gruppens Endelighed.

Man har, idet vi betegne, at en Transformation er identisk, ved at sætte den lig 1,

$$A^4 \equiv 1$$
$$(AB)^4 \equiv 1$$
$$(A^2B)^3 \equiv 1$$
$$B^2 \equiv 1.$$

Den anden og tredie Ligning kunne skrives

$$BABA \equiv A^3BA^3B$$

og

$$BA^2B \equiv A^2BA^2.$$

Lad os nu antage, at vi have

$$BA^pBA^qB\,,$$

saa er denne Transformation, hvis p og q begge ere 1 eller 3, identisk med A^3BA^3 eller ABA, hvis $p = q = 2$, er den identisk med A^2. Hvis alene p eller q er 2, ses det, at BA^pBA^qB kan reduceres til kun at indeholde to Faktorer B. Hvis endelig $p = 1$, $q = 3$, faar man

$$BABA^3B \equiv BABA\,.\,A^2B \equiv A^3BA^3BA^2B \equiv A^3BABA^2,$$

som ogsaa kun indeholder to Faktorer B, og paa samme Maade reduceres BA^3BAB. Et Produkt af Transformationer, hvori der forekommer tre Faktorer B, kan da altid reduceres til kun at indeholde to Faktorer B. Herved ses Gruppens Endelighed at være bevist, idet den kun kan indeholde Transformationer sammensatte af A og B, der i det højeste indeholde to Faktorer B. Den almindeligste Transformation i Gruppen er da

$$A^p B A^q B A^r.$$

Skal den virkeligt ikke kunne reduceres til at indeholde færre Faktorer, maa q ikke være 2, eller $p = q$ eller $q = r$.

Det er da let at se, hvilke Former Transformationerne kunne antage. Vi kunne nemlig danne alle Transformationerne ved enten at multiplicere B eller $ABAB$ paa begge Sider med Potenser af A.

Men $ABAB$ er, idet vi kun opskrive Determinanten,

$$ABAB = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right), & -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right), & \frac{-1-\sqrt{3}}{4}, & -i\sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right), & +i\sqrt{\frac{3}{8}}, & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}.$$

Det er heraf let at udlede, hvor mange Transformationer Gruppen indeholder. Det ses, at den indeholder ialt 36 Transformationer, hvoraf 18 ere af 4de Orden, 9 af 2den Orden og 8 af 3die Orden. Det ses tillige, at dette er den eneste existerende Gruppe indeholdende 36 Transformationer.

55) Vi skulle nu se om den S. 172 (82) omtalte Gruppe existerer.

Existerede den, maatte den i 54) fundne Gruppe være Undergruppe i den. Gruppen maatte nemlig indeholde en Transformation

$$A' = \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \pm \alpha y \\ \mu z' = \alpha z, \end{cases} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2},$$

og (90) viser, at Gruppen maatte indeholde som Undergruppe en Gruppe af den i 54) omtalte Art, idet Sammensætningen af A'^2 og en Transformation af 2den Orden B hørende til Gruppen maatte give Oprindelsen til en saadan Gruppe, hvor B altsaa har samme Koefficienter som i 54).

Da Gruppen ikke skal indeholde flere end 72 Transformationer, maatte den, hvis den existerede, bestaa af den omtalte Undergruppe og dennes Transformationer multiplicerede med A'. Men da maatte $A'B$ være lig en Transformation CA' hørende til Gruppen, idet C er en Transformation i den omtalte Undergruppe, eller $A'BA'^{-1}$ maatte høre til Undergruppen, hvad den ses ikke at gjøre. Skulde der være andre Grupper, der ikke indeholdt Transformationer af højere end 4de Orden, viser (90), at Gruppen i 54) maatte være Undergruppe i dem.

Vi skulle nu se om Gruppen, dannet i 54), kan være Undergruppe i en anden Gruppe, der da maatte være den S. 165 omtalte. Gruppen skulde da endnu indeholde en Transformation C, af 4de Orden, der ombyttede A's Dobbeltpunkter, og hvis anden Potens var identisk med A^2. Man havde da

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = pz \\ \mu z' = qy. \end{cases}$$

Den nye Gruppe maa mindst indeholde 72 Transformationer, idet naar T_1, T_2 ... ere de forskjellige Transformationer i Gruppen 54) CT_1, CT_2 ... alle ere indbyrdes forskjellige og forskjellige fra T_1, T_2 ..., da C ellers hørte til Gruppen.

Man maa altsaa have, hvis den nye Gruppe ikke skal indeholde flere end 72 Transformationer, $CT_1 = T_pC$, eller at CT_1C^{-1} atter hører til 54).

Vi maa altsaa have, at

$$CBC^{-1}$$

atter hører til Gruppen, og omvendt ses, at hvis dette er Tilfældet vil Gruppen 54) være Undergruppe i den nye Gruppe, idet man, da

$$CA = A^{-1}C,$$

i et Produkt

$$A^pC^qB \ldots$$

altid kan bringe Faktorerne C hen paa den første Plads.

Man faar nu

$$CBC^{-1} \equiv \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & -\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\,q, & -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}\,p \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\,p, & \frac{-1-\sqrt{3}}{4}, & -p^2\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}\,q, & -q^2\sqrt{\frac{3}{8}}, & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}$$

Sætter man her $q = \frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$, $p = \frac{i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$, ses denne at falde sammen med $ABAB$, og under Forudsætning af, at man vælger disse Værdier for p og q, er da Gruppens Endelighed bevist.

Man kunde naturligvis for en af Størrelserne p eller q have valgt en vilkaarlig anden primitiv 8de Rod af Enheden.

56) Vi ville nu gaa over til at behandle Grupperne af 5te Orden.

Grupperne af 5te Orden kunne enten indeholde

a) Transformationer af 2den, 3die og 5te Orden

eller

b) Transformationer af 2den, 3die, 4de og 5te Orden.

Vi behandle først det første Tilfælde, idet vi antage, at Gruppen indeholder to Transformationer, A af 5te Orden, B af 2den Orden,

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \bar{\beta} z, \end{cases} \qquad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_1 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor alle Koefficienterne antages reelle.

De mulige Diagonalsummer ere

$$-\alpha^p, \quad 0, \quad \alpha^q\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

For at afgjøre, hvilke af disse der kan bruges, kan man anvende (90), idet man sætter $d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $s = -1$ og bemærker, at ingen af Størrelserne s_p kan være $-\alpha^p$. Vi have da

$$-1 - s_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}(s_1 - s_2),$$

hvor vi endda kunne sætte $s_2 = s_3$. Man har da enten $s_2 = s_3 = 0$, $s_1 = s_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, eller $s_1 = s_4 = 0$, $s_2 = s_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Det er ligegyldigt, hvilke Værdier vi gaa ud fra. Vi ville da gaa ud fra de sidste, som give

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad b_2 = c_3 = -\frac{\sqrt{5}+5}{10}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

altsaa

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{\sqrt{5}}{5} x + \frac{\sqrt{10}}{5} y + \frac{\sqrt{10}}{5} z \\ \mu y' = \frac{\sqrt{10}}{5} x - \frac{\sqrt{5}+5}{10} y + \frac{5-\sqrt{5}}{10} z \\ \mu z' = \frac{\sqrt{10}}{5} x + \frac{5-\sqrt{5}}{10} y - \frac{\sqrt{5}+5}{10} z. \end{cases}$$

Alle Transformationer i Gruppen transformere Keglesnittet

$$x^2 + 2yz = 0$$

til sig selv, og herved bevises da let Gruppens Endelighed, idet den er en Transformation af Ikosaedergruppen for den rette Linie. Vi ville kalde Gruppen Ikosaedergruppen for Planet.

57) Vi gaa nu over til at betragte Tilfældet b).

Vi antage, at Gruppen indeholder to Transformationer A og B ganske af samme Form som i 56).

De mulige Diagonalsummer ere her $-\alpha^p$, 0, α^p, $\alpha^p d$, $\alpha^p d_1$, hvor $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ og $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $d_1 = \frac{+1 - \sqrt{5}}{2}$.

Uden at gjennemgaa de enkelte Tilfælde, skal jeg her opstille Resultaterne af de mulige Tilfælde af Rækker af Diagonalsummer, idet i (90) $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Man har

$s =$	-1	-1	-1	-1
$s_1 =$	0	d_1	$\alpha^p d$	α^p
$s_2 =$	d	0	α^p	$\bar{\alpha}^p d_1$
$s_3 =$	d	0	$\bar{\alpha}^p$	$\alpha^p d_1$
$s_4 =$	0	d_1	$\bar{\alpha}^p d$	$\bar{\alpha}^p$

og, da det er nødvendigt at have alle mulige saadanne Rækker af Diagonalsummer, og der i Gruppen forekommer Transformationer, som, multiplicerede med Potenser af A, ikke give nogen Transformation af 2den. Orden, endnu

$s =$	1	d	d_1
$s_1 =$	$\alpha^p d_1$	1	0
$s_2 =$	$\bar{\alpha}^p d$	0	1
$s_3 =$	$\bar{\alpha}^p d$	0	1
$s_4 =$	$\alpha^p d_1$	1	0

, hvor $p = \begin{cases} 1 \\ 2. \end{cases}$

Det viser sig, at enhver Gruppe, dannet ved alle mulige Produkter af A og B, vil indeholde Transformationer, der, multiplicerede med Potenser af A, give alle de her forekommende Rækker.

Det er da ligegyldigt, fra hvilken Række vi gaa ud (forudsat, at vi ikke komme til en Undergruppe, i Stedet for den fuldstændige Gruppe, hvad der ses at være Tilfældet, naar vi gaa ud fra de første Rækker af reelle Diagonalsummer, der føre til Ikosaedergruppen), og vi ville da gaa ud fra den tredie Række, idet vi sætte $p = 1$.

Vi ville desuden betegne det, at en Transformation har en given Diagonalsum ved at sætte den lig Diagonalsummen, saa at altsaa

$$C = s$$

betyder, at C har Diagonalsummen s, ligesom $B = C$ betyder, at Transformationerne B og C have samme Diagonalsum. Man har da

$$\begin{aligned} B &= -1 \\ AB &= \alpha d \\ A^2 B &= \alpha \\ A^3 B &= \overline{\alpha} \\ A^4 B &= \overline{\alpha} d. \end{aligned}$$

Man kan da vise, at man i alle Tilfælde kan finde Diagonalsummerne, og altsaa bestemme en Transformations Orden, idet man benytter de fundne Rækker af Diagonalsummer, og at en Transformation af en Transformation i Gruppen ved en anden Transformation ikke forandrer den førstes Diagonalsum.

Man har saaledes

$$\begin{aligned} BA^2B &= d_1 \\ A^2BA^2B &= -\overline{\alpha}, \quad (A^2B = \alpha) \end{aligned}$$

og da A^2BA^2B er af 2den Orden, maa den, multipliceret med A^2 og A^{-2}, give konjugerede Diagonalsummer, naar den selv er bragt paa en saadan Form, at dens Diagonalsum er -1, man har da, idet man benytter (90)

$$\begin{aligned} BA^2B &= d_1 \\ ABA^2B &= \alpha \\ A^2BA^2B &= -\overline{\alpha} \\ A^3BA^2B &= 1 \\ A^4BA^2B &= \alpha d_1. \end{aligned}$$

Paa samme Maade faas, idet man stadigt maa bestemme 3 af Værdierne i Rækken for at finde de andre ved (90),

$$\begin{aligned} BAB &= d \\ ABAB &= \overline{\alpha} d_1 \\ A^2BAB &= ABA^2B = \alpha \\ A^3BAB &= \overline{\alpha} d_1 \\ A^4BAB &= d \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} BA^3B &= d_1 \\ ABA^3B &= \overline{\alpha} d_1 \\ A^2BA^3B &= 1 \\ A^3BA^3B &= -\alpha \\ A^4BA^3B &= \overline{\alpha} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BA^4B &= d \\ ABA^4B &= d \\ A^2BA^4B &= \alpha d_1 \\ A^3BA^4B &= \overline{\alpha} \\ A^4BA^4B &= \alpha d_1. \end{aligned}$$

Herved er der bestemt alle Diagonalsummerne for Produkter af Faktorer A og B, der indeholde indtil 4 Led.

Vi ville bestemme Diagonalsummerne for nogle Produkter, der indeholde 6 Faktorer. Man har

$$ABABA^3B = BABABA^3 = \bar{a}\,.\,A^4BA^4BA^2$$
$$= \bar{a}ABA^4B = \bar{a}d,$$

idet

$$(AB)^5 = 3\bar{a},$$

altsaa

$$BABAB \equiv \bar{a}A^4BA^4BA^4.$$

Endvidere

$$A^3BABA^3B = ABA^3BA^3B = \bar{a}A^3BA^2 = -\bar{a};$$

thi

$$A^3BA^3B \equiv aBA^2BA^2.$$

Men herved bestemmes da

$$A^2BABA^3B = 0$$
$$A^4BABA^3B = 0.$$

Man har da Rækken

$$BABA^3B = \bar{a}d$$
$$ABABA^3B = \bar{a}d$$
$$A^2BABA^3B = 0$$
$$A^3BABA^3B = -\bar{a}$$
$$A^4BABA^3B = 0.$$

Paa samme Maade faas

$$BABA^4B = -1$$
$$ABABA^4B = d_1$$
$$A^2BABA^4B = 0$$
$$A^3BABA^4B = 0$$
$$A^4BABA^4B = d_1.$$

Exempler paa de to sidste Rækker Diagonalsummer give $BABA^2B$ og $BABA^2BA^4B$ multiplicerede med Potenser af A.

Det er da vist, at der i Gruppen forekommer alle mulige Rækker af Diagonalsummer.

Vi ville nu vise, at ingen Transformation i Gruppen kan indeholde et uendeligt Antal Faktorer

$$A^pBA^qBA^rB \ldots.$$

For det første kunne vi antage, at ikke to paa hinanden følgende Exponenter q og r ere lige store, thi Transformationen vil da kunne omskrives til at indeholde en eller to Faktorer B mindre, da man har for $k = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

$$BA^kBA^kB \equiv A^{5-k}BA^{5-k}BA^{5-k}$$

og for $k = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$$BA^kBA^kB \equiv A^{5-k}BA^{5-k},$$

idet Tegnet $\equiv$ bruges for at betegne, at to Transformationer ere identiske.

Dernæst kunne vi, uden at forøge B'ernes Antal, antage, at Exponenten 3 ikke forekommer for en Faktor A staaende mellem to B'er. Thi vi have

$$BA^3B \equiv A^2BA^2BA^2.$$

Lad os nu antage, at der forekommer i Transformationen

$$\ldots BA^kBA^3BA^lB \ldots,$$

saa er dette Produkt lig

$$BA^{k+2}BA^2BA^{l+2}B.$$

Ere nu baade k og l forskjellige fra 1, ville baade $k+2$ og $l+2$ være forskjellige fra 3, og vi have saaledes bortskaffet en Faktor A^3, uden at forøge B'ernes Antal. Er $k = 1$, saa maa i den foregaaende Faktor, A^i, i være forskjellig fra 1, og ved atter at bruge samme Relation faas

$$\ldots A^{i+2}BA^2BA^4BA^{l+2}B \ldots,$$

hvor A^3 nu er bortskaffet, hvis l er forskjellig fra 1, er $l = 1$ maa i den efterfølgende Faktor, A^m, m være forskjellig fra 1, og idet vi bruge den samme Reduktion

$$\ldots A^{i+2}BA^2BABA^2BA^{m+2} \ldots,$$

hvor vi nu have bortskaffet en Faktor A^3 uden at forøge B'ernes Antal.

Vi kunne da antage, at i en Transformation

$$\ldots A^pBA^qBA^rBA^sB$$

ingen af Størrelserne q, r, s er 3, og at ikke to paa hinanden følgende Exponenter ere lige store.

Skulde nu Transformationen kunne indeholde et vilkaarligt stort Antal Faktorer, uden at reduceres, ses det, at den maa indeholde alle tre Potenser A, A^2, A^4, idet den ellers kom til at være

$$\ldots A^kBA^lBA^kBA^lB \ldots$$

og Faktoren A^kBA^lB, da $(A^kBA^lB)^m$ er identisk, naar m i det højeste er 5, kun kan forekomme to Gange, uden at Produktet kan reduceres.

Skal altsaa Produktet være inreduktibelt, maa der forekomme Faktorer, naar der er et tilstrækkeligt stort Antal saadanne, hvor tre paa hinanden følgende Potenser af A have forskjellige Exponenter. Der maa da forekomme enten

1) BA^4BA^2BAB
2) BA^4BABA^2B
3) $BABA^2BA^4B$
4) $BABA^4BA^2B$
5) BA^2BABA^4B
6) BA^2BA^4BAB.

Erstattes BA^2B ved $A^3BA^3BA^3$ ses 2) og 5) umiddelbart at kunne reduceres, idet den kan bringes til at indeholde en Faktor B mindre.

Skal i 1) en Faktor BA^l gaa forud, maa l være 1; thi havde man

$$BA^2BA^4BA^2BAB$$

og erstattede det andet BA^2B med $A^3BA^3BA^3$, fik man

$$\ldots BA^2BA^2BA^3BA^4B \ldots,$$

som er reduktibel.

Vi maa altsaa have Rækkefølgen

$$\ldots BABA^4BA^2BAB \ldots,$$

som kan omskrives til

$$\ldots BABA^2BA^3BA^4B \ldots$$

Nu ses imidlertid, at den foregaaende Faktor for de anførte ikke kan være BA, ikke heller BA^4; thi da kunde man skrive

$$\ldots BA^4BABA^2BA^3BA^4B \equiv BA^4BA^4BA^3BABA^4B,$$

som er reduktibel; men den kan heller ikke være A^2; thi da havde man

$$\ldots BA^2BABA^2BA^3BA^4B \ldots$$

og ved at erstatte det første BA^2B ved $A^3BA^3BA^3$, BA^3B ved $A^2BA^2BA^2$ fik man

$$A^3BA^3BA^4BA^4BA^2BAB,$$

som kan reduceres.

Der kan altsaa foran

$$\ldots BABA^4BA^2BAB$$

ikke gaa nogen Faktor B, uden at den kan reduceres til at indeholde færre Faktorer B.

Hvis vi derpaa se paa 3)

$$BABA^2BA^4B,$$

se vi ganske paa samme Maade, at efter BA^4B kan kun følge AB, og at enhver yderligere Tilføjelse af en Faktor A^kB vil bevirke, at Antallet af Faktorer kan reduceres.

Betragte vi derpaa

$$\ldots BABA^4BA^2B \ldots,$$

saa kan her ikke foran den første Faktor komme BA^2; thi da havde man

$$BA^2BABA^4BA^2B \equiv A^3BA^3BA^4BA^4BA^2B,$$

som er reduktibel. Men der kan heller ikke komme BA^4; thi da har man

$$BA^4BABA^4BA^2B \equiv BA^4BABA^2BA^3BA^3 \equiv BA^4BA^4BA^3BABA^3,$$

som ligeledes er reduktibel. Der kan da ikke gaa nogen Faktor B forud for det omtalte Produkt, uden at vi kunne reducere Produktet til at indeholde færre Faktorer.

Paa samme Maade vises, at der ikke kan gaa nogen Faktor B efter

$$BA^2BA^4BAB$$

uden at Produktet er reduktibelt.

Men herved ses da, at Gruppen er endelig, siden enhver af de Faktorer, der nødvendigvis maa forekomme i Produktet, hvis det ikke skal bestaa af en Gjentagelse af de samme Faktorer, ville bevirke dets Reduktion til færre Faktorer, hvis de forekomme mere end en Gang

Vi skulle nu udvikle nogle Relationer, der tjene til at reducere Antallet af Faktorer i et Produkt af Transformationer i Gruppen til det mindst mulige, for derpaa at give et Skema over de Transformationer, der høre til Gruppen, dannede paa den simpleste Maade.

Ifølge det foregaaende har man

$$BABA^2 = a.$$

Man har da

$$BABA^2BABA^2 = -\bar{a},$$

og altsaa

$$BABA^2BABA^2 \equiv A^3BA^4BA^3BA^4B \equiv A^3BABA^2BAB$$

$$BABA^2BAB \equiv A^3BABA^2BABA^3,$$

eller ved Gjentagelse af Operationen

$$C \equiv BABA^2BAB \equiv A^kBABA^2BABA^k, \tag{91}$$

hvor k er et vilkaarligt Tal.

C maa da transformere A^k til A^{-k} og altsaa være en Transformation af Formen

$$\mu x' = -x$$
$$\mu y' = az$$
$$\mu z' = \bar{a}y,$$

hvor $a\bar{a} = 1$.

Af (91) udledes ved at sætte $k = 3$,

$$\left.\begin{aligned} BABA^2BAB &\equiv A^3BABA^2BABA^3 \\ BA^2BABA^2B &\equiv A^4BA^3BABA^2BA \\ &\equiv ABA^4BA^2BA^4BA. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Heraf faas endvidere

$$BABA^2BA^4B \equiv A^3BABA^4BA^2BA^4 \tag{93}$$

og

$$BA^4BA^2BAB \equiv A^4BA^2BA^4BABA^3. \tag{94}$$

Vi faa da følgende Skema over Transformationerne, idet k og l ere Tal, der kunne tillægges Værdierne 1 til 5, og idet der for hver Klasse Transformationer af en hvis Sammensætning anføres dels Totalantallet, dels Antallet af Transformationer af hver Orden, og de Værdier af k og l for hvilke disse faas.

	Transformationens Sammensætning.	Antal af Transformationer				
		2den Orden.	3die Orden.	4de Orden.	5te Orden.	Sum.
1	A^k				4	4
2	$A^k B A^l$	$5, k+l \equiv 0$[1]		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$	25
3	$A^k B A B A^l$			$5, k+l \equiv 2$	$20, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\1\\3\\4\end{matrix}\right.$	25
4	$A^k B A^2 B A^l$	$5, k+l \equiv 2$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$	25
5	$A^k B A^4 B A^l$			$5, k+l \equiv 3$	$20, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\4\end{matrix}\right.$	25
6	$A^k B A B A^2 B A^l$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$	$5, k+l \equiv 1$	25
7	$A^k B A B A^2 B A B$	5				5
8	$A^k B A B A^2 B A^4 B A^l$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$	$5, k+l \equiv 0$	25
9	$A^k B A B A^4 B A^l$	$5, k+l \equiv 0$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$	25
10	$A^k B A B A^4 B A B A^l$	$5, k+l \equiv 2$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$	25
11	$A^k B A^2 B A B A^l$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$	$5, k+l \equiv 1$	25
12	$A^k B A^2 B A B A^2 B A^l$	$5, k+l \equiv 1$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$	25
13	$A^k B A^2 B A^4 B A^l$	$5, k+l \equiv 2$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$	25
14	$A^k B A^2 B A^4 B A B A^l$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$	$5, k+l \equiv 2$	25
15	$A^k B A^4 B A B A^l$	$5, k+l \equiv 0$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$	25
16	$A^k B A^4 B A^2 B A^l$	$5, k+l \equiv 2$	$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$		$10, k+l \equiv \left\{\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$	25
		45	80	90	144	359

Gruppen indeholder, som den skal, 360 Transformationer, og det ses, at Ikosaedergruppen indgaar som Undergruppe i den. (Se Rækken af Diagonalsummer S. 194.)

[1] Ved $k+l \equiv 0$ er underforstaaet mod 5, og lignende Underforstaaelser er gjort ved alle de følgende Kongruenser.

58) Vi have endnu kun tilbage at betragte en Gruppe af 7de Orden (se S. 176), som skal indeholde Transformationer af 7de Orden, 4de Orden, 3die Orden, 2den Orden. Vi kunne da antage, at Gruppen indeholder to Transformationer,

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \alpha^2 x \\ \mu z' = \alpha^4 x, \end{cases}$$

hvor α er en vilkaarlig 7de imaginær Rod af Enheden, og en Transformation B af 2den Orden, med reelle Koefficienter, og at

$$\begin{aligned} d &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 \\ \bar{d} &= \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^4 \\ d + \bar{d} &= -1, \quad d\bar{d} = 2, \end{aligned}$$

saa ville vi ved at multiplicere B med Potenser af A faa følgende mulige Rækker af Diagonalsummer ifølge (90)

s	-1	-1	-1
s_1	$\bar{d}$	0	1
s_2	1	$\bar{d}$	0
s_3	0	1	d
s_4	0	1	$\bar{d}$
s_5	1	d	0
s_6	d	0	1

Det vil vise sig, at der vil forekomme i Gruppen Transformationer af 2den Orden, der ved Multiplikation med Potenser af A ville give alle tre Rækker af Diagonalsummer. Vi gaa da ud fra den anden Række, og antage altsaa, at B ved Multiplikation med A giver denne Række Diagonalsummer.

Man har da

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= -1 \\ a_1\alpha + b_2\alpha^2 + c_3\alpha^4 &= 0 \\ a_1\bar{\alpha} + b_2\bar{\alpha}^2 + c_3\bar{\alpha}^4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. a_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^4 \\ \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^4 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 \end{vmatrix}} = \frac{-(\alpha + \bar{\alpha})}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = p \right\} \quad (95)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_2 &= \frac{-\begin{vmatrix} \alpha^4 & \alpha \\ \bar{\alpha}^4 & \bar{\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^4 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = q \\
c_3 &= \frac{-\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^4 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = r.
\end{aligned}\right\} \quad (95)$$

Man kan her lægge Mærke til, hvad der finder Anvendelse i det følgende, at a_1, b_2, c_3 kredsforskydes, naar for α sættes α^2 (eller $\bar{\alpha}^2$).

Vi ville nu vise, at

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1. \quad (96)$$

Man har nemlig

$$(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\alpha + \bar{\alpha} + 1) = (2 - \alpha - \bar{\alpha})(\alpha + \bar{\alpha} + 1) = \alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2,$$

og altsaa

$$\begin{aligned}
p^2 + q^2 + r^2 &= \frac{(\alpha + \bar{\alpha})^2 + (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 1)^2 + 1}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2} \\
&= \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 2 + \alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + 2 + 2\alpha^2 + 2\bar{\alpha}^2 + 1 + 1}{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 2 + \alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + 2 - 2\alpha^3 - 2\bar{\alpha}^3 - 2\alpha - 2\bar{\alpha}} \\
&= \frac{\alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + 3\alpha^2 + 3\bar{\alpha}^2 + 6}{-\alpha^4 - \bar{\alpha}^4 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2\alpha - 2\bar{\alpha} + 4} = 1,
\end{aligned}$$

idet Tælleren og Nævneren reduceres ved Ligningen

$$\alpha^3 + \bar{\alpha}^3 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + \alpha + 1 = 0.$$

Da man desuden har

$$p + q + r = -1,$$

faas

$$pq + pr + rq = 0. \quad (97)$$

Endvidere har man

$$r^2 + r = \frac{1 - \bar{\alpha} - \alpha + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2}$$

$$pq = \frac{-(\alpha + \bar{\alpha})(1 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2)}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2} = \frac{1 - \alpha - \bar{\alpha} + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{(\alpha + \alpha - \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^2)^2} = r^2 + r.$$

Vi faa da, ved at kredsforskyde α, α^2, α^4,

$$\left.\begin{aligned}
p^2 + p &= rq \\
q^2 + q &= rp \\
r^2 + r &= pq.
\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

Men man faar da, idet vi bruge de sædvanlige Betegnelser for Koefficienterne i B,

$$\begin{aligned} b_1^2 &= pq - r = r^2 \\ c_1^2 &= pr - q = q^2 \\ c_2^2 &= rq - p = p^2, \end{aligned}$$

og det ses da, at vi kunne sætte $b_1 = r$, $c_1 = q$, $c_2 = p$, saa at

$$B = \begin{vmatrix} p & r & q \\ r & q & p \\ q & p & r \end{vmatrix}.$$

Det ses, at B bliver ændret paa samme Maade, hvad enten man kredsforskyder Søjler eller Rækker.

Det skal nu vises, at den Gruppe, vi faa ved at danne alle Multipla af Potenser af A og B, er endelig.

Det skal vises, at Gruppen kun indeholder B, og de Transformationer B' og B'', som faas ved at kredsforskyde p, q, r i B, samt Transformationer af Formen $A^m B A^n$, og lignende Sammensætninger hvor B ombyttes med B' og B'', samt endelig alle Transformationer af 3die Orden af Formen

$$C = \begin{cases} \mu x' = \alpha^p y \\ \mu y' = \alpha^{2p} z \\ \mu z' = \alpha^{4p} x \end{cases}$$

og

$$D = \begin{cases} \mu x' = \alpha^p z \\ \mu y' = \alpha^{2p} x \\ \mu z' = \alpha^{4p} y. \end{cases}$$

Vi ville nu begynde med at danne Transformationerne $A^3 B A^3 B$. Vi faa

$$A^3 B A^3 B = \begin{vmatrix} \alpha^3 p & \alpha^3 r & \alpha^3 q \\ \alpha^6 r & \alpha^6 q & \alpha^6 p \\ \alpha^5 q & \alpha^5 p & \alpha^5 r \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^6 p^2 + \alpha^2 r^2 + \alpha q^2 & \alpha^6 pr + \alpha^2 qr + \alpha pq & \alpha^6 pq + \alpha^2 pr + \alpha qr \\ \alpha^2 pr + \alpha^5 qr + \alpha^4 pq & \alpha^2 r^2 + \alpha^5 q^2 + \alpha^4 p^2 & \alpha^2 rq + \alpha^5 pq + \alpha^4 pr \\ \alpha pq + \alpha^4 pr + \alpha^3 qr & \alpha qr + \alpha^4 pq + \alpha^3 pr & \alpha q^2 + \alpha^4 p^2 + \alpha^3 r^2 \end{vmatrix}.$$

Betegnes Elementerne i denne Determinant med markerede Bogstaver, har man

$$\begin{aligned} a'_1 = \alpha^6 p^2 + \alpha^2 r^2 + \alpha q^2 &= \alpha^3 p (\alpha^3 p + \alpha^6 q + \alpha^5 r) \\ &\quad - \alpha^2 r - \alpha q \\ &= \alpha^3 p - \alpha^2 r - \alpha q, \end{aligned}$$

da $A^3 B$ har Diagonalsummen 1.

Indsættes nu Værdierne for p, q, r, faas

$$a'_1 = q,$$

og, da de andre Diagonalled faas paa samme Maade ved Ombytning af α med α^2 og α^4, ere disse r og p.

Vi have dernæst

$$\begin{aligned} \alpha^6 pr + \alpha^2 qr + \alpha pq &= \alpha^3 p(\alpha^3 r + \alpha^6 p + \alpha^5 q) \\ &\quad + \alpha^2 p \\ &= \alpha^2 p; \end{aligned}$$

da Koefficienten til $\alpha^3 p$ er Diagonalsummen for $A^6 B$.

Paa samme Maade faas

$$\begin{aligned} \alpha^2 pr + \alpha^5 qr + \alpha^4 pq &= \alpha^6 p(\alpha^3 r + \alpha^6 p + \alpha^5 q) \\ &\quad + \alpha^5 p \\ &= \alpha^5 p, \\ \alpha^6 pq + \alpha^2 pr + \alpha qr &= \alpha^3 r(\alpha^3 r + \alpha^6 p + \alpha^5 q) \\ &\quad + \alpha^6 r \\ &= \alpha^6 r, \\ \alpha pq + \alpha^4 pr + \alpha^3 qr &= \alpha^5 r(\alpha^3 r + \alpha^6 p + \alpha^5 q) \\ &\quad + \alpha r \\ &= \alpha r, \\ \alpha^2 rq + \alpha^5 pq + \alpha^4 pr &= \alpha^6 q(\alpha^3 r + \alpha^6 p + \alpha^5 q) \\ &\quad + \alpha^4 q \\ &= \alpha^4 q \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \alpha rq + \alpha^4 pq + \alpha^3 pr &= \alpha^5 q(\alpha^3 r + \alpha^6 p + \alpha^5 q) \\ &\quad + \alpha^3 q \\ &= \alpha^3 q, \end{aligned}$$

saa at Transformationen bliver

$$C' \equiv A^3 B A^3 B \equiv \begin{vmatrix} q & \alpha^2 p & \bar{\alpha} r \\ \bar{\alpha}^2 p & r & \bar{\alpha}^3 q \\ \alpha r & \alpha^3 q & p \end{vmatrix}$$

og altsaa

$$B' \equiv A^2 C' A^{-2} \equiv \begin{vmatrix} q & p & r \\ p & r & q \\ r & q & p \end{vmatrix}.$$

Altsaa indeholder Gruppen den Transformation, som faas ved at kredsforskyde p, q, r i B, og denne Operation kan naturligvis gjentages.

Det er herved indlysende, at vi faa den samme Gruppe, hvilken af Rækkerne i Skemaet S. 198 vi benytte til Dannelsen af B.

Da $A^3 B A^3 B$ hører til de S. 201 nævnte Transformationer, hører $B A^3 B$ og de tilsvarende $B' A^6 B'$, $B'' A^5 B''$ ogsaa dertil, og ligeledes $B A^4 B$, $B' A B'$, $B'' A^2 B''$, da de sidste tre Transformationer ere de omvendte af de tre første.

Men det kan nu vises, at BA^pB ogsaa hører til de omtalte Transformationer, naar p er vilkaarlig. Det er klart, at den gjør det for $p = 3$, men den vil ogsaa gjøre det for enhver anden Værdi f. Ex. $p = 6$. Thi kredsforskydes Søjlerne i det bageste B, Rækkerne i det første, 1 Gang, vil der komme til at staa $B'A^6B'$, som hører til de omtalte Transformationer; men denne Kredsforskydning vil kun have til Følge, at Rækkerne og Søjlerne i den resulterende Transformation BA^6B kredsforskydes, ved atter at kredsforskyde Rækkerne og Søjlerne i $B'A^6B'$ en Gang i modsat Retning, vil man da have BA^6B; men en Kredsforskydning af Rækker og Søjler i en af de omtalte Transformationer vil atter give en Transformation af samme Form.

Men ganske paa samme Maade ses det, at en Transformation af Formen BA^pB' atter hører til de omtalte Transformationer; thi man kan forskyde Søjlerne i B', saa at B' gaar over til at blive B; dette vil kun foranledige en Kredsforskydning af Søjlerne i BA^pB', som altsaa ses at høre til de omtalte Transformationer.

Det ses da, at mere sammensatte Produkter af A, B, B', B'' ogsaa vil føre tilbage til de nævnte Transformationsformer, undtagen hvis der skulde forekomme Sammensætninger af $B \,.\, B'$.

Lad os da se, hvad dette giver. Man har

$$BB' = \begin{vmatrix} p & r & q \\ r & q & p \\ q & p & r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & p & r \\ p & r & q \\ r & q & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

saa at disse Sammensætninger føre til Transformationerne

$$\begin{aligned} \mu x' &= y & \qquad & \mu x' = z \\ \mu y' &= z & \text{eller} \quad & \mu y' = x \\ \mu z' &= x & & \mu z' = y, \end{aligned}$$

og almindeligere ved at sammensætte disse med Potenser af A

$$D = \begin{cases} \mu x' = \alpha^p y \\ \mu y' = \alpha^{2p} z, \\ \mu z' = \alpha^{4p} x \end{cases} \qquad D' = \begin{cases} \mu x' = \alpha^p z \\ \mu y' = \alpha^{2p} x \\ \mu z' = \alpha^{4p} y. \end{cases}$$

Det ses, at Sammensætninger af Transformationer af Formerne D med de allerede forhen nævnte, atter høre til Transformationer af de samme Former, idet man ved at multiplicere med D^p kun faar Søjler eller Rækker kredsforskudte. Gruppens Endelighed er hermed bevist.

Da alle Transformationerne ere indesluttede i følgende Former

$$A^p, \quad A^m B A^n, \quad A^m B' A^n, \quad A^m B'' A^n, \quad D A^n, \quad D' A^n,$$

hvor p, m, n kunne tillægges alle Værdier fra 0 til 6, faas, idet den identiske Transformation medregnes, Antallet af Transformationer hørende til Gruppen at være

$$7 + 3 \,.\, 49 + 14 = 168,$$

saaledes som det skulde være.

Disse Transformationer kunne klassificeres paa følgende Maade.

48 ere af 7de Orden, nemlig

$$A^n \text{ for alle Værdier af } p$$

$$\left.\begin{array}{rl} A^m B A^n \text{ for } & m+n \equiv 2 \\ & m+n \equiv 5 \\ A^m B' A^n \text{ for } & m+n \equiv 3 \\ & m+n \equiv 4 \\ A^m B'' A^n \text{ for } & m+n \equiv 1 \\ & m+n \equiv 6 \end{array}\right\} (\text{mod } 7).$$

42 ere af 4de Orden, nemlig

$$\left.\begin{array}{rl} A^m B A^n \text{ for } & m+n \equiv 3 \\ & m+n \equiv 4 \\ A^m B' A^n \text{ for } & m+n \equiv 1 \\ & m+n \equiv 6 \\ A^m B'' A^n \text{ for } & m+n \equiv 2 \\ & m+n \equiv 5 \end{array}\right\} (\text{mod } 7).$$

56 ere af 3die Orden, nemlig

$$\left.\begin{array}{r} D A^n \\ D' A^n \end{array}\right\} \text{for alle Værdier af } n.$$

$$\left.\begin{array}{rl} A^m B A^n \text{ for } & m+n \equiv 1 \\ & m+n \equiv 6 \\ A^m B' A^n \text{ for } & m+n \equiv 2 \\ & m+n \equiv 5 \\ A^m B'' A^n \text{ for } & m+n \equiv 3 \\ & m+n \equiv 4 \end{array}\right\} (\text{mod } 7).$$

Endelig ere 21 af 2den Orden

$$\left.\begin{array}{r} A^m B A^n \\ A^m B' A^n \\ A^m B'' A^n \end{array}\right\} \text{for } m+n \equiv 0 \ (\text{mod } 7).$$

Transformationerne af 7de Orden høre til 8 forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, Transformationerne af 3die Orden til 28 Sæt Dobbeltpunkter, Transformationerne af 4de Orden til 21 forskjellige Sæt Dobbeltpunkter, medens Transformationerne af 2den Orden alle ere Potenser af Transformationerne af 4de Orden.

Théorie des groupes de transformations finis.

Par

M. H. Valentiner.

I. Remarques générales. Multiplicateurs.

Les transformations dont traite ce mémoire sont des transformations linéaires.

Une transformation linéaire de n variables est déterminée par les équations:

$$\left.\begin{array}{l} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \ldots l_1 v, \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \ldots l_2 v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y + c_{n+1} z \ldots l_{n+1} v, \end{array}\right\} \quad (1)$$

dont le déterminant peut toujours être supposé égal à l'unité. Les quantités a_1, b_1 ... ne sont alors déterminées qu'à un facteur près, qui peut être une racine d'ordre $(n+1)$ de l'unité.

Il y a toujours des points que la transformation laisse comme ils sont. Ces points sont appelés des points doubles, et l'on a pour chacun d'eux:

$$x = x', \; y = y' \ldots v = v'.$$

μ est alors déterminé par l'équation:

$$\left.\begin{vmatrix} a_1 - \mu, & b_1, & c_1 & \ldots l_1 \\ a_2, & b_2 - \mu, & c_2 & \ldots l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1} & \ldots l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0. \right\} \quad (2)$$

2) Cette équation donne $n+1$ valeurs pour μ. Si toutes ces valeurs sont inégales, on trouve $n+1$ points doubles distincts.

3) Si l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à l'équation:

$$xX + yY + \ldots vV = 0 \quad (3)$$

forme un plan, X, Y ... V étant des constantes, les équations (1) transformeront le plan en un autre plan.

Si X, Y ... V sont les coordonnées du plan, elles seront transformées par les équations:

$$\left.\begin{array}{l} \mu' X' = A_1 X + B_1 Y \ldots L_1 V, \\ \mu' Y' = A_2 X + B_2 Y \ldots L_2 V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu' V' = A_{n+1} X + B_{n+1} Y \ldots L_{n+1} V \end{array}\right\} \quad (5)$$

dont les coefficients sont les sous-déterminants des équations (1).

Les plans sur lesquels la transformation n'exerce aucune action sont appelés des plans doubles. Si toutes les racines de l'équation (2) sont inégales, il y aura $n+1$ plans doubles.

Connaissant les coordonnées d'un point double, celles d'un plan double s'obtiendront en remplaçant a_1, b_1 ... par A_1, B_1 ... et μ par $\frac{1}{\mu}$. On voit donc qu'à chaque point double répond un plan double.

4) Chaque plan double renferme tous les points doubles qui ne répondent pas au plan, et réciproquement tous les plans doubles qui ne répondent pas à un point double passent par ce point.

5) Si (2) n'a pas de racines égales, les équations (1) pourront se mettre sous la forme:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 P'_1 = \alpha P_1, \\ \mu_1 P'_2 = \beta P_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu_1 P'_{n+1} = \lambda P_{n+1}, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

où $\alpha, \beta \dots \lambda$ sont des constantes et $P_1, P_2 \dots P_{n+1}$ les premiers membres des équations des plans doubles. On appelle $\alpha, \beta \dots \lambda$ les multiplicateurs de la transformation, et peut toujours supposer $\alpha . \beta \dots \lambda = 1$. Ces multiplicateurs ne sont déterminés qu'à un facteur près, qui peut être une racine d'ordre $(n+1)$ de l'unité.

6) Déterminons les multiplicateurs d'une transformation donnée sous la forme (1). En résolvant les équations (12) par rapport à $\mu_1 x', \mu_1 y' \dots \mu_1 v'$, on doit arriver aux équations (1) et l'on voit que μ et μ_1 ne peuvent différer que par un facteur constant, ce qui permet de poser $\mu_1 = k\mu$, k étant une constante.

Le point double qui répond à $P_{n+1} = 0$ est déterminé par $P_1 = P_2 \dots P_n = 0$. En posant $x' = x$, $y' = y$, ... $v' = v$, on voit que λ est la valeur de μ_1 qui répond à ce point double, et que la valeur correspondante de μ est une racine de (2). On a donc $\lambda = k\mu$, μ étant une racine de (2). Le dernier terme de (2) est ± 1, ce qui donne $\alpha . \beta \dots \lambda . k^{n+1} = 1$, d'où $k^{n+1} = 1$. Les multiplicateurs n'étant déterminés qu'à un facteur près, qui est une racine d'ordre $(n+1)$ de l'unité, on peut poser $k = 1$.

Les multiplicateurs de (1) sont donc les racines de (2), si cette équation n'a pas de racines égales.

7) Si une transformation devient identique en étant élevée à une puissance m, on dit qu'elle est d'ordre m, au cas qu'elle ne devienne pas identique lorsqu'on l'élève à une puissance moindre que m.

Si (2) n'a pas de racines égales, la transformation est d'ordre m lorsque m et $n+1$ sont premiers entre eux, et les multiplicateurs, des racines primitives d'ordre m de l'unité.

Si m et $n+1$ ne sont pas premiers entre eux, nous nous bornerons à examiner le cas où $m = p^q$, p étant un nombre premier, tandis que $n+1$ renferme le facteur p^s. Dans ce cas, les multiplicateurs, lorsque la transformation est de l'ordre p^q, doivent être de la forme $\chi\alpha, \chi\beta \dots \chi\lambda$, χ étant une racine d'ordre p^{q+s} de l'unité et $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$ des racines d'ordre p^q de l'unité.

8) Si (2) a des racines égales, en cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une puissance de la transformation (1) soit la transformation identique, on arrive au résultat suivant:

Les racines de (2) doivent être des racines de l'unité, et si l'une d'elles est du degré p de multiplicité, les plans doubles qui répondent à cette racine doivent former une suite infinie du degré $p-1$ de multiplicité.

On appelle toujours les racines de (2) les multiplicateurs de la transformation.

Tout plan double qui répond à un multiplicateur renfermera toujours tous les points doubles qui ne répondent pas à ce multiplicateur, et réciproquement tout point double qui répond à un multiplicateur sera situé dans tout plan double qui ne répond pas à ce multiplicateur.

II. Combinaisons des transformations.

10) Nous chercherons à déterminer la forme des transformations appartenant à des groupes qui ne renferment que des transformations dont les multiplicateurs ont le module 1, et qui peuvent être mises sous la forme (12).

Nous supposons que le groupe contient les transformations A et B, que les multiplicateurs de A sont tous différents, et qu'on a pris pour plans fondamentaux du système des coordonnées les plans doubles de A.

Les transformations A et B sont alors représentées par les équations:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \dots\dots \\ \mu v' = \lambda v \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \dots l_1 v \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \dots l_2 v \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y \dots l_{n+1} v. \end{cases}$$

Les multiplicateurs de B sont déterminés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 - \mu & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \dots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} \mu^{n+1} - (a_1 + b_2 \dots l_{n+1})\mu^n + ((a_1 b_2) + (a_1 c_3) \dots)\mu^{n-1} \\ \mp (A_1 + B_2 \dots L_{n+1})\mu \pm 1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$(a_1 b_2)$ étant égal à $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ et A_1, B_2 ... étant les sous-déterminants de a_1, b_2 ...

Comme $|\mu| = 1$ ($|\mu|$ = le module de μ), et que l'équation (24) doit être satisfaite si l'on y remplace μ par $\frac{1}{\mu}$, puisque $\overline{\mu} = \frac{1}{\mu}$, et a_1, b_2 ... l_{n+1} par leurs valeurs conjuguées, on doit avoir:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_2 \dots l_{n+1} &= \overline{A_1} + \overline{B_2} \dots \overline{L_{n+1}} \\ (a_1 b_2) + (a_1 c_3) \dots &= (\overline{A_1 B_2}) + (\overline{A_1 C_3}). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ces équations doivent aussi être satisfaites par les coefficients de $A^m B$, et on a alors:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^m a_1 + \beta^m b_2 \ldots \lambda^m l_{n+1} &= \alpha^m \overline{A_1} + \beta^m \overline{B_2} \ldots \lambda^m \overline{L_{n+1}} \\ \Sigma \alpha^m \beta^m (a_1 b_2) &= \Sigma \alpha^m \beta^m \overline{(A_1 B_2)}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Tous les multiplicateurs de A étant différents, le degré p de A doit être plus grand que $n+1$, et les équations (26) devant être satisfaites par toutes les valeurs de m, on aura:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \overline{A_1} \\ b_2 &= \overline{B_2} \\ &\cdots\cdots \\ l_{n+1} &= \overline{L_{n+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

11) Si B et C sont des transformations arbitraires du groupe, on obtient en appliquant les équations (27) au premier coefficient de $CA^m B$, $\alpha_1, \beta_1 \ldots \lambda_1$ étant les coefficients de C et m arbitraire:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 a_1 &= \overline{\mathrm{A}_1 A_1} \\ \beta_1 a_2 &= \overline{\mathrm{B}_1 A_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 a_{n+1} &= \overline{\Lambda_1 A_{n+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

De là on déduit, en identifiant C avec B ou avec la transformation inverse de B:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \overline{A_1^2} \\ b_1 a_2 &= \overline{B_1 A_2} \\ c_1 a_3 &= \overline{C_1 A_3} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l_1 a_{n+1} &= \overline{L_1 A_{n+1}} \end{aligned}\right\} (29) \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned} a_1 A_1 &= \overline{a_1 A_1} \\ a_2 A_2 &= \overline{a_2 A_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+1} A_{n+1} &= \overline{a_{n+1} A_{n+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Les équations (29) et autres analogues qu'on obtient en égalant les autres éléments du terme principal du déterminant de $CA^m B$ aux conjugués de leurs sous-déterminants, expriment que le produit de deux éléments du déterminant d'une transformation qui sont symétriques par rapport au terme principal, est le conjugué du produit de leurs sous-déterminants. Les équations (30) et leurs analogues expriment que le produit de chaque élément par son sous-déterminant est une quantité réelle.

12) Soit A, B, C ... les transformations d'un groupe et F une transformation arbitraire; le groupe et ses transformations seront transformés par F si l'on opère toutes les transformations:

$$FAF^{-1}, \; FBF^{-1}, \; FCF^{-1} \ldots$$

Une transformation FAF^{-1} a les mêmes multiplicateurs que A, et ses points doubles sont les points en lesquels F transforme les points doubles de A.

13) Pour qu'une transformation A ne soit pas transformée par F, il faut que F ait les mêmes points doubles que A ou produise un déplacement circulaire des points doubles de A. Dans le dernier cas, les points doubles de A doivent se composer de groupes de $r+1$ points P_1, $P_2 \ldots P_{r+1}$, dont les multiplicateurs respectifs sont m, ma, ma^r, où $a^{r+1} = 1$, et F doit transformer P_1 en P_2, P_2 en $P_3 \ldots P_{r+1}$ en P_1.

14) Si un ou plusieurs éléments des déterminants d'une transformation sont nuls pour toutes les transformations du groupe, la discussion d'un groupe contenant des transformations de n variables peut toujours être ramenée à celle de groupes qui en contiennent

un moins grand nombre. C'est pourquoi on supposera toujours dans ce qui suit que cela n'a pas lieu. Il résulte de (28) qu'on peut toujours supposer qu'un élément et son sous-déterminant sont nuls en même temps.

15) Nous transformerons maintenant un groupe (contenant les transformations ci-dessus mentionnées A et B) par une transformation:

$$F \equiv \begin{cases} \mu x' = p x \\ \mu y' = q y \\ \dots\dots \\ \mu v' = t v, \end{cases}$$

où $p, q \dots t$ sont des constantes arbitraires différentes de zéro.

La transformation A reste par suite telle qu'elle est, tandis que B devient:

$$\begin{aligned} \mu x' &= a_1 x + \frac{p b_1 y}{q} + \frac{p c_1 z}{r} \dots \frac{p l_1 v}{t} \\ \mu y' &= \frac{q a_2 x}{p} + b_2 y + \frac{q c_2 z}{r} \dots \frac{q l_2 v}{t} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu v' &= \frac{t a_{n+1} x}{p} + \frac{t b_{n+1} y}{q} \dots l_{n+1} v. \end{aligned}$$

A_2 est alors remplacé par $\frac{p A_2}{q}$. On peut donc déterminer $p, q, r \dots$ de manière que

$$\left|\frac{q}{p} a_2\right| = \left|\frac{p}{q} A_2\right| \qquad \left|\frac{r}{p} a_3\right| = \left|\frac{p}{r} A_3\right| \dots$$

et, par suite, que tous les éléments dans la première colonne du déterminant transformé aient le même module que leurs sous-déterminants.

Comme il est indifférent, dans les recherches qui suivent, qu'on considère le groupe primitif ou le groupe transformé, nous supposerons toujours que:

$$|a_1| = |A_1|, \ |a_2| = |A_2| \dots |a_{n+1}| = |A_{n+1}|.$$

Il résulte alors de (30) que:

$$a_1 = \overline{A_1}, \ a_2 = \pm \overline{A_2}, \ a_3 = \pm \overline{A_3} \dots a_{n+1} = \pm \overline{A_{n+1}} \tag{33}$$

et de (28) que:

$$\alpha_1 = \overline{\mathrm{A}_1}, \ \alpha_2 = \pm \overline{\mathrm{A}_2}, \ \alpha_3 = \pm \overline{\mathrm{A}_3} \dots \alpha_{n+1} = \pm \overline{\mathrm{A}_{n+1}} \tag{34}$$

les signes se correspondant dans (33) et (34).

La dérivation des équations (33) et (34) exige qu'aucune des quantités $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$ ne soit nulle; mais si l'une d'elles, a_p, est nulle, il doit y avoir une transformation pour laquelle l'élément correspondant à a_p ne l'est pas, et cet élément peut alors être employé de la même manière que a_p.

C étant une transformation arbitraire du groupe, nous pouvons maintenant former $C^{-1}A^m B$. L'élément qui, dans le déterminant de $C^{-1}A^m B$, répond à a_2 est alors:

$$\alpha^m \mathrm{B}_1 a_1 + \beta^m \mathrm{B}_2 a_2 \dots \lambda^m \mathrm{B}_{n+1} a_{n+1}$$

et son sous-déterminant:

$$\overline{\alpha^m} \beta_1 A_1 + \overline{\beta^m} \beta_2 A_2 \dots \overline{\lambda^m} \beta_{n+1} A_{n+1}.$$

De là on tire suivant (34):

$$\mathrm{B}_1 a_1 = \pm \overline{\beta_1 A_1}, \ \mathrm{B}_2 a_2 = \pm \overline{\beta_2 A_2} \dots \mathrm{B}_{n+1} a_{n+1} = \pm \overline{\beta_{n+1} A_{n+1}}, \tag{35}$$

où l'on prend le signe supérieur ou inférieur suivant que $a_2 = \pm \overline{A}_2$. Les équations (35) et celles qu'on obtient en considérant les éléments qui correspondent à $a_3, a_4 \ldots a_{n+1}$ dans $C^{-1}A^mB$, montrent que chaque élément du déterminant de C est le conjugué de son sous-déterminant avec le signe $+$ ou $-$. On voit aussi que tous les éléments du déterminant de C, dans une colonne, sont les conjugués de leurs sous-déterminants, tous avec le même signe que dans la première colonne, ou avec un signe contraire. Il résulte en outre de (29) que deux éléments symétriques par rapport au terme principal sont les conjugués de leurs sous-déterminants avec le même signe.

16) Si l'on pose:

$$f = x\overline{x} + \varepsilon_1 y\overline{y} + \varepsilon_2 z\overline{z} \ldots \varepsilon_n v\overline{v}$$

et remplace $x, y, z \ldots v$ par $\mu x', \mu y', \mu z' \ldots \mu v'$, ces quantités étant déterminées par (1) et les coefficients de (1) remplissant les conditions du § 15, on voit que f ne varie pas lorsque $\varepsilon_p = \pm 1$, suivant que $a_p = \pm \overline{A_p}$.

Réciproquement, si une transformation A est telle que $\mu x', \mu y' \ldots \mu v'$ substitués dans f à $x, y \ldots v$, ne font pas varier f, les coefficients de A rempliront les conditions du § 15, le déterminant de A étant 1.

III. Groupes finis des transformations de la ligne droite.

17) Supposons qu'un groupe fini renferme les deux transformations:

$$A = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \qquad B = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y. \end{cases}$$

a_2 et b_1 devront être nuls en même temps, car si a_2 seul l'était, $BAB^{-1}A^{-1}$ ne pourrait appartenir à un groupe fini.

Nous avons, d'après le § 15, $a_1 = \overline{b_2}$, $a_2 = \pm b_1$; mais on ne peut avoir $a_2 = \overline{b}_1$, car $ABA^{-1}B^{-1}$ serait alors une transformation qui ne peut pas figurer dans un groupe fini.

18) Nous allons maintenant déterminer les groupes finis possibles, notamment leur ordre et le nombre de transformations qu'ils contiennent.

Supposons qu'un groupe renferme une transformation A et transformons A par toutes les transformations du groupe, ce qui revient à former toutes les transformations $C = BAB^{-1}$, B étant une transformation arbitraire du groupe. Nous obtiendrons ainsi N transformations C (y compris la transformation identique), qui cependant ne seront pas toutes différentes.

Toutes les transformations différentes qui ont été formées en transformant A par toutes les transformations d'un groupe, constituent ce que nous appellerons la série de A.

C'est sur le nombre des transformations d'une pareille série que portera notre recherche. S'il y a dans le groupe un certain nombre p de transformations qui ne font pas varier A, il y en aura tout autant qui ne feront pas varier toute autre transformation de la série de A. Toutes les transformations qui ont les mêmes points doubles que A sont des puissances d'une seule et même transformation, et, sans restreindre la généralité des considérations qui suivent, nous pouvons supposer que cette transformation est A. Si A est d'ordre n, n étant plus grand que 2, A et ses puissances sont les seules transformations qui ne fassent pas varier A. En désignant par S le nombre des transformations de la série de A, on aura donc $nS = N$ d'où $S = \frac{N}{n}$. Toutes les transformations d'une même série ont les mêmes multiplicateurs, et par suite deux transformations d'une même série ne peuvent avoir de points doubles communs, à moins que l'une d'elles ne soit la transformation inverse de l'autre.

Si une transformation A et son inverse appartiennent à la même série, il doit y avoir dans le groupe une transformation qui permute les points doubles de A. Chaque série de A^p renferme donc aussi $\frac{N}{n}$ transformations, à moins que A et A^{-1} n'appartiennent à la même série et que A^p ne soit du deuxième ordre, et, dans ce cas, la série de A^p se compose de $\frac{N}{2n}$ transformations. Appelons les séries appartenant à toutes les transformations qui ont les mêmes points doubles, les séries de ces points doubles, ou celles d'une des transformations qui ont ces points doubles; les séries de A comprendront alors $\frac{(n-1)N}{n}$ ou $\frac{(n-1)N}{2n}$ transformations, suivant que le groupe ne contient pas ou contient une transformation qui permute les points doubles de A.

Il reste à trouver combien de transformations renferme une transformation du deuxième ordre avec sa série, lorsque A n'est pas une puissance d'une autre transformation.

S'il n'y a aucune transformation qui permute les points doubles de A, A et sa série contiennent $\frac{N}{2}$ transformations.

Y a-t-il une transformation B qui permute les points doubles de A, A et BAB^{-1} sont identiques. B doit aussi être du deuxième ordre, car de:

$$A = BAB^{-1}$$

il suit que:

$$B = ABA^{-1}.$$

Il est maintenant facile de voir que si une transformation C, autre que B, permute les points doubles de A, elle doit être identique à AB, car autrement CB serait une transformation ayant les mêmes points doubles que A, sans cependant lui être identique. Il y a donc dans le groupe 4 transformations qui ne font pas varier A, à savoir la transformation identique, A, B et AB. A, avec sa série, contient $\frac{N}{4}$ transformations.

19) Comme le groupe, outre les séries qu'il contient, renferme encore la transformation identique, nous aurons la proposition suivante:

Si un groupe se compose des transformations:

$A_1, A_2 \ldots$ de l'ordre $n_1, n_2 \ldots$ et

$B_1, B_2 \ldots$ de l'ordre $m_1, m_2 \ldots$

avec leurs séries respectives, et qu'il n'y ait aucune transformation d'un ordre plus élevé que $n_1, n_2 \ldots m_1, m_2 \ldots$ avec les mêmes points doubles que $A_1, A_2 \ldots B_1, B_2 \ldots$, on aura:

$$N\left(\frac{n_1-1}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_2} \ldots \frac{m_1-1}{2m_1} + \frac{m_2-1}{2m_2} \ldots\right) + 1 = N,$$

où N désigne le nombre des transformations du groupe, étant donné qu'il n'y a aucune transformation qui permute les points doubles de A_1, A_2 ..., tandis qu'il y en a une qui permute ceux de B_1, B_2 ...

Comme n_1 est au moins égal à 2, $\frac{n_1 - 1}{n_1} \geqq \frac{1}{2}$.

Il ne peut donc y avoir au plus dans le groupe qu'une transformation avec ses séries dont les points doubles ne soient pas permutés par quelque transformation du groupe.

S'il y a une pareille transformation dans le groupe, on voit qu'il ne peut au plus renfermer qu'une transformation avec ses séries dont les points doubles soient permutés par quelque transformation du groupe.

Si le groupe ne comprend qu'une transformation dont les points doubles ne sont pas permutés et les séries qui appartiennent à cette transformation, on doit avoir:

$$N = n_1$$

le groupe ne contient qu'une transformation et ses puissances.

Si le groupe renferme les transformations A_1 et B_1, on aura:

$$N\left(\frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{m_1 - 1}{2m_1}\right) + 1 = N,$$

$$N = \frac{2m_1 n_1}{n_1 + 2m_1 - m_1 n_1}.$$

Le dénominateur devant être positif, il en résulte que:

$$n_1 + 2m_1 - m_1 n_1 > 0 \quad \text{et} \quad (m_1 - 1)(n_1 - 2) < 2,$$

ce qui exige ou que $n_1 = 2$ et m_1 soit arbitraire, ou que $n_1 = 3$ et $m_1 = 2$.

Ces deux cas correspondent à des groupes finis, mais le premier seulement lorsque m est impair. Dans le premier cas, on a $N = 2m$ et un groupe cyclique, dans le second $N = 12$ et un groupe tétraédrique.

Si le groupe ne renferme que des transformations dont les points doubles sont permutés par une autre transformation, le groupe ne peut au plus renfermer que 3 transformations avec leurs séries respectives. On a alors:

$$\frac{N}{2}\left(\frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3}\right) + 1 = N.$$

Aucun des termes ne peut manquer, puisque le groupe comprendrait alors un nombre de transformations moins grand que l'ordre le plus élevé de celles dont il se compose. Une au moins des quantités m doit être égale à 2, car autrement on aurait:

$$\frac{N}{2}\left(\frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3}\right) \overline{\gtrless} N.$$

Nous poserons donc $m_1 = 2$, ce qui donne:

$$N = \frac{4m_2 m_3}{2m_2 + 2m_3 - m_2 m_3}.$$

On doit alors avoir:

$$(m_2 - 2)(m_3 - 2) < 4.$$

Nous aurons ainsi le cas suivants:

$$m_2 = 2, \quad m_3 \text{ arbitraire},$$
$$m_2 = 3, \quad m_3 = 3,$$
$$m_2 = 3, \quad m_3 = 4,$$
$$m_2 = 3, \quad m_3 = 5.$$

De ces cas, le deuxième est impossible, car le groupe devrait contenir deux transformations B et C du 3e ordre avec des points doubles différents. On peut maintenant faire voir que toute transformation A du 2e ordre qui permute les points doubles de B doit aussi permuter ceux de A. Mais le groupe, contrairement à l'hypothèse, devrait alors renfermer au moins 5 transformations du 2e ordre A, BA, B^2A, CA et C^2A.

Aux autres cas, par contre, correspondent des groupes réels, au premier pourtant, seulement lorsque m_3 est pair. Le groupe est alors cyclique.

A $m_2 = 3$, $m_3 = 4$, correspond le groupe octaédrique, pour lequel $N = 24$.

A $m_2 = 3$ et $m_3 = 5$, correspond le groupe icosaédrique, pour lequel $N = 60$.

20) Nous déterminerons encore algébriquement dans les paragraphes suivants les groupes possibles.

Lorsque deux transformations appartiennent à un groupe fini, le rapport anharmonique entre leurs points doubles est réel.

21) En supposant toujours que le groupe contient les deux transformations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \end{cases},$$

nous pouvons, d'après le § 20, supposer que le groupe est transformé de manière que A et B aient des points doubles réels. a_2 et b_1 sont alors des quantités purement imaginaires.

Nous formerons maintenant AB^2A, qui est supposé être de l'ordre n. Si n est pair, $(AB^2A)^{\frac{n}{2}}$ sera une transformation du 2e ordre.

Si n n'est pas pair, on peut former:

$$(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB \,.\, BA(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}},$$

qui est une transformation identique. Ses deux parties, que sépare le signe de la multiplication, sont telles que l'une se déduit de l'autre en permutant A et B.

On voit donc que:

$$C \equiv (AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB \quad \text{et} \quad C_1 \equiv (A^{-1}B^{-2}A^{-1})^{\frac{n-1}{2}} A^{-1}B^{-1}$$

sont des transformations identiques. Mais comme A et B ont des points doubles réels, C et C_1 ont des multiplicateurs communs et des points doubles dont les coordonnées sont des quantités conjuguées ou des quantités réelles. Si les coordonnées des points doubles de C sont réelles, C ne variera pas lorsque ses multiplicateurs seront permutés avec leurs quantités conjuguées, ce qui seulement est possible si C est du 2e ordre.

Si les coordonnées des points doubles sont des quantités conjuguées complexes, les points doubles de C et de C_1 doivent être harmoniques. Le groupe renferme alors deux transformations dont les points doubles sont harmoniques, et nous pouvons supposer que A et B sont deux pareilles transformations, A et B appartenant aux formes ci-dessus mentionnées. a_1 et b_2 doivent être des quantités réelles lorsque les points doubles de A

et de B sont harmoniques. Nous pouvons alors transformer le groupe de manière que a_2 et b_1 deviennent aussi réels. On voit donc que les points doubles de:

$$AB^m AB^{-m} A$$

sont les conjugués harmoniques de ceux de B, et si le premier coefficient de A n'est pas nul, on peut toujours déterminer m de manière que le premier coefficient de $AB^m AB^{-m} A$ soit numériquement moindre que le coefficient correspondant de A sans cependant être nul. Le groupe ne peut être fini à moins de contenir des transformations du 2e ordre.

22) Un groupe fini devant toujours renfermer une transformation du 2e ordre, nous pouvons supposer que A est une transformation de cet ordre et se présente sous la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases},$$

où a et b sont réels. On peut aussi supposer que le premier coefficient, dans toutes les transformations du 2e ordre du groupe, est nul ou qu'il ne l'est pas. Examinons d'abord le dernier cas en choisissant A de manière que $a > 0$, et que sa valeur numérique soit la plus petite qu'il puisse avoir dans une transformation du 2e ordre appartenant au groupe.

Nous formerons maintenant $AB^m AB^{-m} A$, qui est aussi une transformation du 2e ordre (A transformée par AB^m). Le premier coefficient de cette transformation est:

$$ia\left(-a^2 - b^2\left(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m}\right) + b^2\right)$$

et on doit alors avoir:

$$|a| \leqq \left|a\left(-a^2 - b^2\left(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m}\right) + b^2\right)\right|,$$

à moins que:

$$-a^2 - b^2\left(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} - 1\right) = 0.$$

On a $a^2 + b^2 = 1$ et, en posant $\alpha = \cos u + i \sin u$, on aura ou:

$$-1 + 4b^2 \sin^2 mu = 0 \tag{49}$$

ou:

$$\left|-1 + 4b^2 \sin^2 mu\right| \geqq 1, \tag{50}$$

équations qui doivent être satisfaites par toutes les valeurs de m.

Comme $|b| < 1$ et que m peut toujours être choisi de manière que $|\sin mu| > 0$, on tire de (50):

$$|\sin mu| > \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

ou de (49):

$$|\sin mu| > \tfrac{1}{2}.$$

Si B est une transformation d'ordre n, $\sin\frac{\pi}{n}$ sera la plus petite valeur numérique de $\sin mu$. On doit donc toujours avoir:

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{1}{2}, \quad n < 6.$$

Un groupe fini, si $|a| > 0$, peut donc au plus renfermer des transformations du 5e ordre.

Si toutes les transformations du 2e ordre appartenant au groupe sont de la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ay \\ \mu y' = -\bar{a}x \end{cases}$$

les points doubles de A et de B seront harmoniques, et l'on voit facilement que le groupe sera un groupe cyclique qui ne renferme pas d'autres transformations que celles de la forme B^p et B^qA.

23) Aperçu des groupes possibles.

A) Toutes les transformations sont des puissances de la même transformation.

B) Le groupe renferme des transformations avec des points doubles différents.

1) Groupes cycliques. Ils se composent des puissances d'une transformation A d'ordre n et de n transformations du 2^e ordre qui permutent les points doubles de A.

2) Groupes qui renferment plusieurs transformations d'un ordre plus élevé que le 2^e, avec des points doubles différents.

a) Groupes tétraédriques, qui se composent d'une transformation du 3^e ordre avec des séries de 8 transformations, et d'une transformation du 2^e ordre avec une série de 3 transformations. $N = 12$.

b) Groupes octaédriques, qui renferment une transformation du 4^e ordre avec des séries de 9 transformations, une du 3^e ordre avec des séries de 8 transformations, et une du 2^e ordre avec une série de 6 transformations. $N = 24$.

c) Groupes icosaédriques, qui comprennent une transformation du 5^e ordre avec des séries de 24 transformations, une du 3^e ordre avec des séries de 20 transformations, et une du 2^e ordre avec une série de 15 transformations. $N = 60$.

24) Formation des groupes cycliques.

25) Groupe tétraédrique. Il contient une transformation du 2^e ordre:

$$A = \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases}$$

et une transformation:

$$B = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y \end{cases} \qquad \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

BA aussi bien que B^2A doit être du 3^e ordre, puisque A ne permute pas les points doubles de B. On a par suite:

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \qquad b = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Au groupe appartiennent toutes les transformations de la forme:

$$C = \begin{cases} \mu x' = \dfrac{i\alpha^p\sqrt{3}}{3} x + \dfrac{i\alpha^q\sqrt{6}}{3} y \\[2ex] \mu y' = \dfrac{i\bar{\alpha}^q\sqrt{6}}{3} x - \dfrac{i\bar{\alpha}^p\sqrt{3}}{3} y. \end{cases}$$

On voit que le groupe est fini puisque le produit des transformations des formes que nous considérons ici présente une de ces formes.

26) Groupe octaédrique. Il est déterminé par les deux transformations:

$$A = \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases}$$

et:

$$B = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y, \end{cases} \qquad \text{où } \alpha = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.$$

BA et B^3A doivent être du 3^e ordre et B^2A du 4^e. On trouve $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Le groupe renferme, outre B, toutes les transformations de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{\alpha^p i\sqrt{2}}{2} x + \dfrac{\alpha^q i\sqrt{2}}{2} y \\ \mu y' = \dfrac{\overline{\alpha}^q i\sqrt{2}}{2} x - \dfrac{\overline{\alpha}^p i\sqrt{2}}{2} y, \end{cases}$$

où $p+q$ est un nombre pair et:

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^r y \\ \mu y' = -\overline{\alpha}^r x. \end{cases}$$

Le groupe est fini, car les produits des transformations des formes dont il s'agit ici donnent des transformations qui ont les mêmes formes.

27) Groupe icosaédrique. Nous supposons toujours que le groupe renferme les deux transformations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases}$$

et:

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \overline{\alpha} y, \end{cases} \qquad \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Nous pouvons avoir ici BA du 5^e ordre et B^2A du 3^e ou l'inverse. On aura alors, en prenant a négatif, ou:

$$a = \frac{-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$$

ou:

$$a = \frac{-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \quad \text{et} \quad b = \pm\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}.$$

En prenant les premières valeurs de a et de b, nous pouvons montrer que le groupe, outre B et ses puissances, renferme toutes les transformations de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p x - \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q y \\ \mu y' = \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \overline{\alpha}^q y + \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \overline{\alpha}^p y, \end{cases}$$

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \dfrac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p x + \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q y \\ \mu y' = \dfrac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \overline{\alpha}^q y + \dfrac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \overline{\alpha}^p y \end{cases}$$

et:

$$E \equiv \begin{cases} \mu x = \alpha^p y \\ \mu y = -\overline{\alpha}^p x. \end{cases}$$

On voit, comme dans les deux cas précédents, que le groupe est fini, la multiplication de deux transformations des formes ci-dessus donnant une transformation qui a une de ces formes.

IV. Groupes finis des transformations du plan (ou Groupes finis des transformations de 2 variables).

28) Les transformations du plan ont en général 3 points doubles et 3 lignes doubles. Il peut cependant arriver que deux des multiplicateurs sont égaux. Dans ce cas, les transformations sont dites perspectives. Toutes les lignes qui passent par un de leurs points doubles sont des lignes doubles, et tous les points de la ligne double qui ne passe pas par ce point double sont des points doubles. Le point et la ligne en question sont appelés le centre perspectif et l'axe perspectif de la transformation. Le produit de deux transformations perspectives donne une transformation qui a un point double à l'intersection des axes perspectifs, et une ligne double dans la ligne qui joint les centres perspectifs.

Nous montrerons d'abord qu'il n'existe pas de groupes qui se composent exclusivement de transformations perspectives, à moins que toutes les transformations du groupe n'aient trois points doubles communs.

Etant donné deux transformations perspectives A et B où la ligne des centres est $x = 0$ et l'intersection des axes $x = 0$, $y = 0$, et où le centre perspectif de A est $x = 0$, $y = 0$, elles seront représentées par les équations:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \alpha^2 z \end{cases} \quad \text{et } B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

où B a encore un multiplicateur égal à a_1. Mais AB ne peut pas alors être une transformation perspective, à moins que A et B n'aient trois points doubles communs. Par conséquent, si toutes les transformations du groupe n'ont pas trois points doubles communs, le groupe doit renfermer des transformations qui ne sont pas perspectives, et nous pouvons lui appliquer les propositions développées dans les chapitres I et II.

29) Cherchons maintenant si un groupe fini peut renfermer des transformations de la forme:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{et } B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = \qquad b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = \qquad b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ou:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{et } B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ou, en d'autres termes, si un élément d'un déterminant d'une transformation peut être nul sans que le sous-déterminant correspondant le soit.

Il nous suffira de considérer le premier cas, B transformant les coordonnées d'une ligne droite à l'aide d'une transformation de la forme B'.

On trouve qu'un groupe fini ne peut contenir des transformations de la forme A et B, car il devrait alors aussi renfermer une transformation de la forme:

$$\begin{aligned} \mu x' &= x + qy + rz \\ \mu y' &= y \\ \mu z' &= z. \end{aligned}$$

30) Nous supposerons toujours dans ce qui suit que le groupe renferme une transformation qui n'est pas perspective, et dont les points doubles coïncident avec les points fondamentaux du système des coordonnées.

De même nous nous bornerons, dans ce qui suit, à désigner les transformations par leurs déterminants.

Nous savons, d'après les §§ 14 et 29, que, dans chaque transformation:

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{69}$$

chaque élément est le conjugué de son sous-déterminant avec le signe $+$ ou $-$.

Les multiplicateurs sont déterminés par l'équation:

$$\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (A_1 + B_2 + C_3)\mu - 1 = 0 \tag{70}$$

et comme:

$$a_1 + b_2 + c_3 = \overline{A}_1 + \overline{B}_2 + \overline{C}_3,$$

cette équation montre que les multiplicateurs de B sont déterminés par $a_1 + b_2 + c_3$, qu'on appelle la somme principale de la transformation. Les points doubles de celle-ci sont déterminés par les équations:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_3 - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_1 - (b_2 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_3} \\
\frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_2 - (a_1 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_3}
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

où μ est une racine de (70). Ces 3 groupes d'équations deviennent identiques en y remplaçant μ par sa valeur, mais nous les emploierons tous les trois dans ce qui suit.

31) Nous montrerons maintenant que, dans un groupe fini, les éléments de chaque transformation sont les conjugués de leurs sous-déterminants.

Suivant le § 14, tous les éléments d'une ligne doivent être les conjugués de leurs sous-déterminants avec le même signe que les éléments correspondants d'une autre ligne, ou ils doivent avoir tous un signe contraire. Les éléments du terme principal sont tous les conjugués de leurs sous-déterminants avec le signe $+$, et deux éléments symétriques par rapport au terme principal sont les conjugués de leurs sous-déterminants avec le même signe. S'il y a maintenant dans B (B ayant le même signification que dans 30)) un élément qui est le conjugué de son sous-déterminant avec le signe $-$, il doit y avoir des lignes où se trouvent deux éléments semblables.

Nous pouvons supposer que la ligne supérieure en est une, et on a alors:

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 - |c_1|^2 = 1$$

et par conséquent:

$$|a_1| > 1.$$

Soit $A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$ une transformation du groupe et formons $A^m B A^{-m} B^{-1}$, le premier élément en sera $|a_1|^2 - \alpha^m \overline{\beta}^m |b_1|^2 - \alpha^m \overline{\gamma}^m |c_1|^2$.

Si nous posons maintenant:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos t + i\sin t \\ \beta &= \cos u + i\sin u \\ \gamma &= \cos v + i\sin v \end{aligned}$$

la partie réelle du premier élément sera:

$$a = |a_1|^2 - \cos m(t-u)\,|b_1|^2 - \cos m(t-v)\,|c_1|^2 .$$

On peut toujours choisir m de façon que a soit plus grand que $|a_1|^2$ et, par conséquent, que la partie réelle de a_1, d'où il suit que le groupe ne peut être fini.

32) Recherche des conditions que doivent remplir les éléments de B.

Ces conditions, à savoir que a_1, b_2, c_3 doivent être les conjugués de leurs sous-déterminants, sont indépendantes les unes des autres. Mais nous montrerons que, en donnant a_1, b_2, c_3, on détermine déjà par là si les autres éléments peuvent être ou non les conjugués de leurs sous-déterminants.

L'équation (70) donne:

$$\mu^{\frac{3}{2}} - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{-\frac{1}{2}} b_3 = \mu^{-\frac{3}{2}} - (A_1 + B_2)\mu^{-\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}} c_3$$

et comme les quantités de chaque côté du signe $=$ sont conjuguées, elles sont toutes deux réelles. Les dénominateurs à trois termes des équations (71) sont donc réels. Si, dans les deux premières lignes de (71), on multiplie l'un par l'autre le premier et le dernier rapport, il vient:

$$(\mu^{-\frac{1}{2}} A_3 + \mu^{\frac{1}{2}} c_1)(\mu^{-\frac{1}{2}} C_1 + \mu^{\frac{1}{2}} a_3) = \text{une quantité réelle.} \tag{73}$$

On a en outre:

$$b_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{c}_1 \\ \bar{a}_3 & \bar{c}_3 \end{vmatrix}$$

et comme $\bar{a}_1 \bar{c}_3 = A_1 C_3$, on aura aussi:

$$A_3 C_1 = \bar{a}_3 \bar{c}_1 \tag{74}$$

et les équations analogues.

De (73) on déduit alors:

$$c_1 C_1 + a_3 A_3 = \text{une quantité réelle.}$$

Mais il résulte de (74) que:

$$c_1 C_1 a_3 A_3 = \text{une quantité réelle positive,}$$

et, les éléments du terme principal étant les conjugués de leurs sous-déterminants, il s'ensuit par conséquent que $c_1 C_1$ et $a_3 A_3$ sont des quantités réelles ou imaginaires conjuguées. Si $c_1 C_1$ est réel, cette condition, jointe aux précédentes et à celle que $|a_1|$, $|b_2|$, $|c_3|$ sont tous plus petits que 1, est suffisante pour qu'on puisse donner à la transformation la forme mentionnée au § 31. Il est en effet facile d'en conclure que le produit de chaque élément par son sous-déterminant est une quantité réelle. Si quelques-uns de ces produits étaient négatifs, les trois quantités $|a_1|$, $|b_2|$, $|c_3|$ ne pourraient pas toutes être plus petites que 1.

On peut du reste calculer facilement $c_1 C_1$ et trouve:

$$c_1 C_1 = \frac{1 - |a_1|^2 + |b_2|^2 - |c_3|^2 \pm R}{2},$$

où

$$R = \sqrt{1 + \Sigma|a_1|^4 + 4(a_1 b_2 c_3 + \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3) - 2(\Sigma|a_1|^2 + \Sigma|a_1{}^2 b_2{}^2|)}.$$

33) Passant maintenant à la composition des transformations qui ont les mêmes points doubles, nous pourrons nous borner à considérer le cas de deux transformations A et B de l'ordre p^{a_1} et p^{a_2}, p étant un nombre premier, et arrivons alors au résultat suivant: si les transformations avec les mêmes points doubles ne sont pas toutes des puissances d'une seule et même transformation, on peut, lorsque $a_2 \leqq a_1$, supposer B choisie de façon qu'elle ne soit pas égale à une puissance de A, ou à une puissance de A multipliée par une transformation d'un ordre inférieur à p^{a_2}; le produit des puissances de A et de B donnera alors $p^{a_1+a_2}$ transformations, parmi lesquelles se trouveront toutes les transformations de l'ordre p^{a_2} avec les points doubles donnés. En général, on voit donc que si des transformations ayant les mêmes points doubles ne sont pas toutes des puissances de la même transformation, elles peuvent être formées en multipliant deux transformations et leurs puissances.

34) En supposant toujours que les groupes ne se composent pas uniquement de transformations avec des points doubles communs, nous examinerons à présent ceux qui renferment des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le 2^e^.

Supposons d'abord que le groupe renferme des transformations perspectives du 6^e^ ordre ou au-dessus. S'il en contient deux avec des centres différents, ces transformations et le groupe formé par leur combinaison laisseront la ligne des centres comme elle est. Le groupe étant du 6^e^ ordre ou au-dessus par rapport à cette ligne, il devra être cyclique relativement à la même ligne, et l'axe de l'une des transformations passera par le centre de l'autre. Il est alors facile de voir, en supposant que les points doubles de l'une des transformations du groupe coïncident avec les points fondamentaux du système des coordonnées, que le groupe ne peut avoir que des transformations de la forme:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ \mu x' = \alpha x & \mu x' = a x & \mu x' = p y \\ \mu y' = \beta y & \mu y' = b z & \mu y' = q z \\ \mu z' = \gamma z & \mu z' = c y & \mu z' = r x \end{array}\right\} \quad (76)$$

ou les transformations qu'on obtient en permutant x, y, z. Nous appelons ces groupes des groupes cycliques du plan.

35) Si le groupe renferme des transformations perspectives du 5^e^ ordre, il doit être cyclique ou aussi contenir 2 transformations B et C de la même espèce, avec des centres différents et d'une nature telle que le groupe formé par B et C ne transforme pas la ligne des centres et soit icosaédrique par rapport à cette ligne.

A et B peuvent s'écrire sous la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha} x \\ \mu y' = \alpha^2 y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \quad \text{et } B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha} x \\ \mu y' = b_2 x + c_2 y \\ \mu z' = b_3 x + c_3 y \end{cases}$$

et le groupe renfermera alors une transformation qui permute les points doubles de A et, par conséquent, aussi:

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha} x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y \\ \mu z' = \alpha^2 z \end{cases} \quad \text{et } AD \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{\alpha}^2 x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \alpha z . \end{cases}$$

La transformation qui permute les points doubles de A doit avoir la forme:

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^p x \\ \mu y' = c_2 z \\ \mu z' = b_3 y \end{cases} \quad \text{pour } c_2 b_3 = -a^p.$$

$E^{10}AD$ est donc une transformation perspective du 10e ordre. Suivant le § 34, toutes les transformations du groupe doivent laisser la même ligne droite comme elle est.

36) Supposons maintenant que le groupe renferme des transformations perspectives du 4e ordre. Comme auparavant, on voit que le groupe doit être ou cyclique, ou renfermer deux transformations perspectives du 4e ordre, et telles que le groupe formé par leur combinaison transforme la ligne des centres par un groupe octaédrique. Les transformations A et B ayant la même forme que dans 35), le groupe doit renfermer une transformation:

$$\begin{aligned} \mu x' &= -x \\ \mu y' &= iy \\ \mu z' &= iz \end{aligned}$$

et on en conclut que, dans un groupe fini, l'intersection des axes de deux transformations perspectives du 4e ordre et la ligne qui en joint les centres, seront toujours respectivement le centre et l'axe d'une nouvelle transformation perspective du 4e ordre.

Le groupe octaédrique de la ligne droite ne contient que 3 transformations du 4e ordre avec des points doubles différents. On voit donc que l'axe d'une transformation perspective du 4e ordre appartenant à une groupe fini, ne peut au plus être coupé qu'en 6 points différents par les axes des autres transformations analogues du groupe. Mais on peut montrer que si les transformations du groupe ne laissent pas toutes la ligne droite sans changement (ou si le groupe n'est pas cyclique), chacun des axes ci-dessus mentionnés sera coupé au moins en 7 points par les autres axes. Par conséquent, toutes les transformations du groupe doivent laisser une ligne droite comme elle est.

37) Nous arrivons maintenant aux groupes qui renferment des transformations perspectives du 3e ordre. Prenons un groupe contenant deux de ces transformations mises sous la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a} z \end{cases} \quad \text{et } B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

où a est une racine 9e de l'unité, et considérons le cas où la ligne des centres, $x = 0$, n'est pas transformée par un groupe tétraédrique, AB doit alors aussi être une transformation perspective du 3e ordre, car autrement AB serait du 2e ordre pour $x = 0$ et $(AB)^2$ une transformation perspective du 6e ordre. A^2B sera donc du 2e ordre par rapport à $x = 0$ et $(A^2B)^2$ une transformation perspective du 2e ordre avec $x = 0$ pour axe.

L'intersection des axes de deux transformations perspectives du 3e ordre et la ligne qui en joint les centres, sont donc respectivement le centre et l'axe d'une autre transformation perspective du 3e ordre, en tant que le centre de l'une des deux premières transformations ne se trouve pas sur l'axe de l'autre.

On peut aussi montrer que l'intersection des axes de deux transformations perspectives respectivement du 2e et du 3e ordre, dont le centre de l'une n'est pas situé sur l'axe de l'autre, doit être le centre d'une transformation perspective du 3^e ordre dont l'axe est la ligne des centres des deux premières, et que cette ligne n'est pas transformée par les transformations d'un groupe cyclique.

Mais on peut montrer qu'il n'y a que des groupes dont les transformations ne transforment pas une ligne droite. Car autrement, par tous les centres des transformations perspectives du 3^e ordre, situés sur $x = 0$, et par les points en lesquels ces centres peuvent être transformés, devraient passer deux lignes qui sont des transformations de $x = 0$. Si le groupe renfermait N transformations, le nombre de celles qui ne transforment pas $x = 0$ serait, avec les transformations de leurs séries, représenté par $\frac{53}{72}N$, et si le groupe était possible, on aurait $N = 216$, et le nombre des autres transformations du groupe devrait être $\frac{7}{27}N$, ce qui, on le voit, est impossible.

38) Cherchons maintenant si des groupes dont les transformations ne transforment pas toutes la même ligne droite, et qui ne sont pas cycliques, peuvent renfermer deux transformations A et B avec des points doubles différents, et telles qu'elles aient une puissance commune, qui alors devra être une transformation perspective du 2^e ordre.

A et B peuvent se mettre sous la forme:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \qquad B = \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

Comme conséquence de ce que nous savons des groupes de la ligne droite, et vu que les groupes ne doivent pas renfermer des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le deuxième, α et a_1 doivent l'un et l'autre être égaux à ± 1. Au cas que les transformations d'un groupe non cyclique ne transforment pas $x = 0$, il faut que α et a_1 correspondent à $+1$, soit parce que, sans cela, le groupe devrait renfermer des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le deuxième, soit parce que, si un groupe octaédrique ne fait pas varier $x = 0$, le nombre des transformations qui ne font pas varier $x = 0$ serait, avec les transformations de leurs séries, réprésenté au moins par $\frac{35}{48}N$; or on voit que N doit être égal à 48, et que toutes les transformations du groupe doivent ne pas transformer $x = 0$.

39) En partant toujours de l'hypothèse que le groupe n'est pas cyclique, et que ses transformations ne laissent pas toutes la même droite comme elle est, nous allons chercher dans quelles circonstances une transformation A, avec les multiplicateurs α, β, γ, peut être transformée par une autre transformation B du groupe en une transformation ayant les mêmes points doubles que A.

Il peut se présenter les cas suivants:

1) Les points doubles de A ne sont pas déplacés par la transformation dont il s'agit. A et B doivent avoir des points doubles communs. Elles peuvent être l'une et l'autre des puissances de la même transformation, ou des puissances de la même transformation multipliée par une transformation perspective du 2^e ordre ayant les mêmes points doubles que A et B.

2) B peut permuter deux des points doubles de A. Les multiplicateurs de A doivent être ± 1, α, $\pm \bar{\alpha}$.

3) B peut déplacer circulairement les points doubles de A. B^3 doit alors avoir pour points doubles ceux de A, et par suite être une transformation identique. B est du 3[e] ordre.

Supposons qu'on ait:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$$

en déplaçant circulairement les points doubles de A, il vient:

$$A' = \begin{cases} \mu x' = \beta x \\ \mu y' = \gamma y \\ \mu z' = \alpha z. \end{cases}$$

On voit facilement qu'il nous suffira de discuter le cas où A et A' appartiennent au même groupe fini, et où A est de l'ordre p^a, p étant un nombre premier; A' doit alors être une puissance de A ou une puissance de A multipliée par une transformation du 2[e] ordre.

Laissant de côté le cas de $p = 2$, nous devrons avoir:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta^m f \\ \beta &= \gamma^m f \\ \gamma &= \alpha^m f \end{aligned} \qquad \text{où } f = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

et, comme $\alpha . \beta . \gamma = 1$,

$$1 = \alpha^{m^3-1} f^{m^2+m+1}.$$

En faisant $p = 3$, nous voyons que cette dernière équation ne peut être satisfaite que si $a = 1$, car elle est impossible pour $a = 2$ et, par conséquent, pour de plus grandes valeurs de a. Si p n'est pas égal à 3, on aura $1 = \alpha^{m^3-1}$, ce qui fait voir que p doit être un nombre premier de la forme $3q + 1$.

Une transformation dont les points doubles sont déplacés circulairement par une autre transformation d'un groupe fini doit être d'un ordre n, n pouvant renfermer les facteurs 2, 3 et des facteurs premiers de la forme $3q + 1$. Si A est de l'ordre $2n$, et qu'aucune transformation d'un ordre plus élevé n'ait les mêmes points doubles que A, il y aura en tout $4n$ transformations avec les points doubles de A.

40) Voyons maintenant combien de transformations renferment divers sous-groupes avec leurs séries.

Soit toujours N le nombre des transformations d'un groupe. S'il n'est rien dit de contraire, on suppose toujours qu'une transformation A est d'un ordre aussi élevé ou plus élevé que toute autre transformation ayant les mêmes points doubles que A. Supposons d'abord que le groupe ne renferme pas de transformations avec des points doubles différents et une puissance commune, et que l'ordre n de A soit impair. De même que dans le § 18, on trouve que A, avec ses séries, renferme respectivement $\frac{n-1}{n}N$, $\frac{n-1}{2n}N$ et $\frac{n-1}{3n}N$ transformations, suivant qu'il n'y a pas de transformation qui permute les points doubles de A, ou qu'il y en a une qui en permute deux, ou enfin qu'il y en a une qui les déplace circulairement.

Si $n = 3$, les points doubles peuvent à la fois être déplacés circulairement et permutés deux à deux. Dans ce cas, A avec ses séries renferme $\frac{N}{9}$ transformations, et doit avoir les multiplicateurs 1, α, $\bar{\alpha}$, si deux de ses points doubles sont permutés.

41) Supposons maintenant A d'ordre pair. S'il y a des transformations ayant les mêmes points doubles que A et qui ne sont pas des puissances de A, elles doivent être une puissance de A multipliée par une transformation du 2^e^ ordre, car autrement le groupe renfermerait des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le 2^e^. Nous pouvons, dans ce cas, supposer que toutes les transformations avec les mêmes points doubles que A sont formées par le produit des puissances de:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{par} \quad A' \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = y \\ \mu z' = -z \end{cases}$$

et que A est de l'ordre $2n$, où n est impair, puisque autrement le groupe renfermerait des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le 2^e^.

Si A est une transformation d'ordre pair dont les points doubles sont permutés par une transformation B, examinons le cas où A est de la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = -\bar{\alpha} z. \end{cases}$$

La transformation qui permute les points doubles de A peut alors avoir la forme:

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \alpha z \\ \mu z' = \mp \bar{\alpha} y. \end{cases}$$

Nous prendrons pour B le signe supérieur, car sinon AB serait une transformation ayant les mêmes propriétés que B et son premier multiplicateur $+1$. On voit alors (ce que je n'ai pas fait observer dans le texte danois), qu'une transformation de la forme A dont les points doubles sont permutés par une autre transformation du groupe, ne peut se trouver que dans des groupes qui ont des transformations avec des points doubles différents, mais avec une puissance commune, B^2 ayant les mêmes points doubles que A.

On peut du reste procéder comme dans le § 40, en prenant pour l'ordre de A le nombre des transformations qui ont les mêmes points doubles que A.

42) Nous passerons maintenant à l'examen du nombre des transformations dans des séries appartenant à des sous-groupes dont les transformations ont une puissance commune, et dont aucune ne transforme une ligne droite $x = 0$.

Deux transformations d'un pareil sous-groupe seront de la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \pm \bar{\alpha} z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Si le sous-groupe, en ce qui concerne $x = 0$, n'est pas cyclique, il faut prendre le signe supérieur, et le nombre des transformations qui ne transforment pas $x = 0$ sera, avec leurs séries, de $\frac{2q-1}{2q}N$, q étant au moins égal à 12.

Si le sous-groupe est cyclique, A de l'ordre $2q$ et qu'on prenne le signe supérieur, ce nombre sera de $\frac{4q-1}{4q}N$.

Si le sous-groupe est cyclique et si l'on prend le signe inférieur de A, mais qu'il n'existe aucune transformation du 2[e] ordre qui ait les mêmes points doubles que A sans être une puissance de A, A doit être de l'ordre $8q$, car si n, étant l'ordre de A, n'était divisible que par 2 ou par 4, ou aucune puissance de A ne serait du 2[e] ordre avec $x = 0$ pour axe perspectif, ou une puissance de A serait une transformation perspective du 4[e] ordre. $A^{2m+1}B$ et $(A^{2m}B)^2$ peuvent appartenir à la même série. Le nombre des transformations qui ne transforment pas $x = 0$ est, avec leur séries, d'au moins $\frac{12q-1}{16q}N$.

Les mêmes considérations s'appliquent au cas d'une transformation du 2[e] ordre qui a les mêmes points doubles que A sans être une puissance de A; A doit alors être de l'ordre $2q$, q étant impair, et il y a en tout $4q$ transformations avec les mêmes points doubles que A. Le nombre des transformations qui, avec leurs séries, ne transforment pas $x = 0$ est au moins égal à $\frac{6q-1}{8q}N$. Ce chiffre cesse d'être exact si $q = 3$, et une autre transformation déplace circulairement les points doubles de A. Dans ce cas, A, $A^{2m}B$ et leurs séries forment $\frac{29}{72}N$ transformations.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas où l'on prend pour A le signe supérieur, le nombre des transformations qui ne transforment pas $x = 0$ sera, avec leurs séries, de $\frac{p-1}{p}N$, p étant au moins égal à 8. Si $p > 8$, le groupe ne peut renfermer que les transformations ci-dessus avec leurs séries, et aucune d'elles ne transforme la droite $x = 0$.

Si $p = 8$, le groupe peut encore renfermer une transformation du 3[e] ordre dont les points doubles sont à la fois déplacés circulairement et permutés deux à deux. On a alors:

$$\frac{7}{8}N + \frac{1}{9}N + 1 = N \quad \text{et} \quad N = 72$$

et le groupe existe réellement. Il renfermera comme sous-groupe un groupe pour lequel $N = 36$.

Lorsqu'on prend pour A le signe inférieur, nous avons vu que le nombre des transformations qui, avec leurs séries, ne transforment pas $x = 0$ est au moins de $\frac{6q-1}{8q}N$ si q est autre que 3, et de $\frac{29}{72}N$ si $q = 3$. Des considérations analogues à celles que nous exposerons plus loin montrent que, dans les deux cas, il n'y a que des groupes dont aucune transformation ne transforme la même droite, ou des groupes cycliques.

43) Voyons maintenant d'une manière générale quels sont les groupes qui ne renferment pas de transformations ayant des points doubles différents, mais une puissance commune. Appelant $N\Sigma\frac{n-1}{n}$ le nombre des transformations dont les points doubles ne sont permutés par aucune autre transformation du groupe, $N\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}$ le nombre des transformations dont deux points doubles sont permutés, $N\Sigma\frac{n_2-1}{3n_2}$ le nombre des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement, et enfin $\frac{qN}{9}$ le nombre des transformations dont les points doubles sont à la fois permutés et déplacés circulairement, on aura:

$$N\left(\Sigma\frac{n-1}{n}+\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}+\Sigma\frac{n_2-1}{3n_2}+\frac{q}{9}\right)+1=N \tag{79}$$

ou:

$$\frac{1}{N}=1-\Sigma\frac{n-1}{n}-\Sigma\frac{n_1-1}{2n_1}-\Sigma\frac{n_2-1}{3n_2}-\frac{q}{9} \tag{80}$$

équation qui donne la proposition suivante:

Le nombre des transformations d'un groupe fini est égal au plus petit multiple commun des ordres des transformations du groupe, ou à ce nombre multiplié par 2, 3 ou 6. On voit en même temps que ces facteurs ne peuvent intervenir que si le groupe renferme des transformations dont deux points doubles seulement sont permutés par une autre transformation du groupe, ou des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement, ou enfin des transformations de ces deux espèces à la fois. (81)

Nous pouvons nous borner à examiner les groupes qui renferment des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement, ceux où cela n'a pas lieu devant renfermer le même nombre de transformations de divers ordres que les groupes de la ligne droite. La proposition ci-dessus fournit une très bon moyen pour juger de la possibilité des groupes.

Si le groupe n'est pas cyclique, il doit au moins renfermer deux transformations A et B du même ordre n avec des points doubles différents. Cette dernière condition étant remplie,

$$B,\ ABA^{-1}\ .\ .\ .\ A^{n-1}BA^{-n+1}$$

seront en général des transformations toutes différentes, et deux ou trois d'entre elles seulement pourront avoir les mêmes points doubles, si A ou une puissance de A permute ou déplace circulairement les points doubles de B. En pareil cas, ces transformations auront deux par deux ou trois par trois des points doubles communs.

La groupe renfermera alors au moins $n+1$, $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{3}+1$ transformations avec des points doubles différents appartenant à la même série, c'est-à-dire, outre celles ci-dessus mentionnées, A, qui, avec ses séries, se compose au moins de

$$(n-1)(n+1),\quad (n-1)\left(\frac{n}{2}+1\right),\quad (n-1)\left(\frac{n}{3}+1\right)$$

transformations.

Le nombre de transformations dans la même série devant être de $\frac{n-1}{n}N$, $\frac{n-1}{2n}N$, $\frac{n-1}{3n}N$, N doit être égal à ou plus grand que:

$$n(n+1), \quad n(n+2), \quad n(n+3).$$

44) Groupes renfermant des transformations dont les points doubles ne sont pas permutés par une autre transformation du groupe.

Le seul cas possible est celui où le groupe, outre les transformations ci-dessus, renferme des transformations du 3^e^ ordre dont les points doubles sont déplacés circulairement. On doit alors avoir:

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{n} - \frac{q}{9},$$

équation qui est satisfaite par:

$$n = 4 \text{ et } q = 2, \quad \text{ou} \quad n = 8 \text{ et } q = 1.$$

On verra qu'il existe réellement un groupe, pour lequel $N = 36$, qui renferme des transformations du 4^e^ ordre dont les points doubles ne sont pas permutés, et en outre deux séries de transformations du 3^e^ ordre dont les points doubles sont à la fois permutés et déplacés circulairement.

45) Groupes ne renfermant que des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement par d'autres transformations du groupe.

On trouve que ces groupes ne sont possibles qu'à condition d'être cycliques.

46) Groupes renfermant trois séries différentes de transformations dont les points doubles sont permutés par d'autres transformations, et en outre des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement.

Il n'existe aucun groupe fini de cette espèce.

47) Groupes renfermant deux transformations avec leurs séries dont deux points doubles sont permutés par d'autres transformations du groupe.

On a l'équation:

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{2n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9}, \tag{83}$$

laquelle est satisfaite par $n = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 7$ et $q = 0$, qui appartiennent à un groupe existant réellement et pour lequel $N = 168$. (84)

L'équation est également satisfaite, le terme en n_2 manquant, par $n = 4$, $n_1 = 5$ et $q = 2$; $N = 360$. (86)

47 bis) Enfin le groupe pourrait renfermer une transformation avec ses séries dont les points doubles sont permutés, et des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement.

Il n'existe pas de pareils groupes.

Nous donnerons quelques exemples comme preuves de l'impossibilité des groupes, lorsque les nombres des transformations dans les séries appartenant au groupe satisfont à l'équation (80), sans cependant que le groupe existe.

L'équation:

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{2n_1} - \frac{q}{9}$$

est satisfaite par $n = 8$, $n_1 = 10$, $q = 1$, $N = 720$. Le groupe devrait renfermer 36 transformations du 10^e^ ordre avec des points doubles différents. On voit alors qu'il devrait exister deux pareilles transformations A et B, telles que A^5 et B^5, qui sont du 2e ordre, permutassent les points doubles de B et de A. Ni A ni B ne transformeront alors la même section conique, et le groupe ne peut être fini, car, comme il est facile de voir, les groupes dont aucune des transformations ne transforme la même section conique, sont des transformations des groupes de la ligne droite.

La même équation est satisfaite par $n = 3$, $n_1 = 8$, $q = 2$, $N = 144$.

Le groupe doit renfermer seulement 9 transformations du 8e ordre avec des points doubles différents, et par conséquent seulement 9 transformations du 2e ordre. Mais une transformation A du 8e ordre aura alors ses points doubles permutés par B^4, B étant également une transformation du 8e ordre, et, dans ce cas, $A^n B^4$ sera aussi une transformation du 2e ordre, de sorte qu'il y aura 8 transformations de cet ordre dont les centres seront situés sur une des lignes doubles D de A. Mais comme B a un point double P situé sur D, D pourra être transformé en 4 lignes différentes passant par P, et le groupe, contrairement à l'hypothèse, devrait alors renfermer plus de 9 transformations du 2e ordre.

On peut assez souvent employer le raisonnement suivant. La seule transformation qui puisse avoir des points doubles coïncidant avec des points doubles d'autres transformations qui n'ont aucun point double commun, est une transformation du 2e ordre. L'axe de cette transformation du 2e ordre passe alors par les points doubles communs ci-dessus mentionnés. Si maintenant l'on désigne par P et Q deux points doubles de deux transformations qui n'en ont aucun de commun, et qu'il puisse être prouvé que trois transformations A, B, C du 2e ordre permutent P et Q, AB et AC doivent être deux transformations du 2e ordre dont les axes coïncident. Mais deux pareilles transformations ne peuvent appartenir à un groupe fini.

On prouvera de la même manière l'impossibilité d'un groupe pour lequel $N = 36$, qui renferme trois séries de transformations du 2e ordre, deux séries de transformations du 3e ordre, et où les ordres des transformations appartenant aux différentes séries satisfont à l'équation:

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n-1}{2n_1} - \frac{n_2-1}{2n_2} - \frac{q}{9}$$

où $n = n_1 = n_2 = q = 2$.

48) Pour qu'une transformation ne transforme pas une section conique, il faut que la somme principale[1]) soit nulle. On voit que l'équation:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \alpha z \end{cases}$$

ne transforme pas la section conique:

$$ax^2 + byz = 0,$$

et qu'une pareille section conique est tangente aux lignes doubles $y = 0$, $x = 0$, et passe par les points doubles $(x = 0,\ y = 0)$, $(x = 0,\ z = 0)$.

---

[1]) C'est-à-dire la somme des éléments du terme principal.

Il est facile de voir que la condition ci-dessus, qui ici s'est montrée suffisante, est également nécessaire. Il faut cependant se rappeler que la somme principale n'est déterminée qu'à un facteur près, qui est une racine cubique arbitraire de l'unité, de sorte que les transformations dont la somme principale est une quantité réelle multipliée par une racine cubique de l'unité, ne transforment pas non plus une section conique; mais la transformation est alors identique à une transformation avec un terme principal réel.

49) Dans toute transformation du 2e ordre, les éléments du terme principal doivent être réels. Réciproquement, cette condition, avec les suivantes, à savoir que chaque élément est le conjugué de son sous-déterminant, et que la somme principale doit être égale à -1, est suffisante pour que la transformation soit du 2e ordre.

50) Si un groupe renferme les transformations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

et qu'on désigne respectivement par d et s_p les sommes principales de A et de $A^p B$, on aura:

$$\alpha^p a_1 + \beta^p b_2 + \gamma^p c_3 = s_p.$$

En supposant que A n'est pas une transformation perspective, et en éliminant a_1, b_2, c_3 entre les 4 équations qui donnent les valeurs de s_p, s_{p+1}, s_{p+2}, s_{p+3}, il vient:

$$s_p - s_{p+3} = \overline{d}\, s_{p+1} - d\, s_{p+2}. \tag{90}$$

Si B est du 2e ordre, on doit, suivant le § 49, avoir $s_p = \overline{s_{n-p}}$.

51) Formons maintenant les groupes qui existent réellement et commençons par ceux du 3e ordre, en rappelant qu'un groupe est du même ordre que l'ordre le plus élevé de ses transformations. Nous laisserons de côté les groupes cycliques et ceux dont aucune des transformations ne transforme la même ligne droite.

Nous supposons que le groupe du 3e ordre renferme deux transformations, dont une, A, du 3e ordre et l'autre, B, du 2e ordre, et que tous les coefficients de B sont réels. On a alors:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \overline{\alpha} z \end{cases} \qquad B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

On doit donc avoir:

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= -1 \\ a_1 + \alpha b_2 + \overline{\alpha} c_3 &= 0 \\ a_1 + \overline{\alpha} b_2 + \alpha c_3 &= 0 \end{aligned}$$

et par suite:

$$\begin{aligned} a_1 = b_2 = c_3 &= -\tfrac{1}{3} \\ b = c_1 = c_2 &= \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Aucune des transformations du groupe ne transforme la section conique:

$$x^2 + 2yz = 0.$$

Une ligne droite pouvant par inversion et projection être transformée en une section conique arbitraire, on voit qu'à chaque transformation linéaire qui ne transforme pas une ligne droite, correspond une transformation qui ne transforme pas une section conique. A chaque groupe fini de la ligne droite correspond un groupe du plan, dont les transformations ne transforment pas une section conique et ne peuvent qu'en transformer chaque point en un nombre fini de points. Mais le groupe doit alors aussi être fini pour le plan.

Le groupe que nous venons de déterminer correspond au groupe tétraédrique, et s'appelle le groupe tétraédrique du plan.

52) Passons maintenant aux groupes du 4e ordre. En supposant que le groupe renferme deux transformations A et B de la même forme que dans le § 51, avec la seule différence que A est du 4e ordre, nous aurons pour B, AB, A^2B, A^3B une colonne de sommes principales qui sera ou:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} a_1+b_2+c_3&=-1\\ a_1+ib_2-ic_3&=0\\ a_1-b_2-c_3&=1\\ a_1-ib_2+ic_3&=0 \end{aligned} \qquad \text{ou:} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} a_1+b_2+c_3&=-1\\ a_1+ib_2-ic_3&=\alpha^p\\ a_1-b_2-c_3&=0\\ a_1-ib_2+ic_3&=\overline{\alpha}^p. \end{aligned}$$

$$\text{où } \alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

53) Dans le cas de a), on a:

$$a_1=0,\quad b_2=c_3=-\tfrac{1}{2},\quad b_1=c_1=\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad c_2=\tfrac{1}{2}.$$

Ni A ni B ne transforment $x^2+2yz=0$. Le groupe formé par A et B est une transformation du groupe octaédrique, et s'appelle le groupe octaédrique du plan.

54) Dans le cas de b), on a:

$$a_1=-\frac{1}{2},\qquad b_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{4},\quad c_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$$

$$b_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}},\quad c_1=\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}},\quad c_2=\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

En désignant par $C\equiv 1$ que C est une transformation identique, on aura:

$$A^4\equiv 1,\quad (AB)^4\equiv 1,\quad (A^2B)^3\equiv 1,\quad B^2\equiv 1\ (a).$$

Supposons qu'on a formé la transformation:

$$BA^pBA^qB,$$

ce produit peut, dans tous les cas, être réduit à renfermer un facteur B plus petit. Si p ou q est égal à 2, on peut poser:

$$BA^2B\equiv A^2BA^2$$

et l'on a:

$$BA^2BA^qB\equiv A^2BA^{q+2}B.$$

Si p et q sont l'un et l'autre égaux à 1 ou à 3, la seconde équation (a) donnera:

$$BA^pBA^pB\equiv A^{4-p}BA^{4-p}.$$

Si $p=\begin{cases}1\\3\end{cases}$ et $q=\begin{cases}3\\1\end{cases}$, on aura:

$$BA^pBA^qB\equiv A^qBA^qBA^{2q}B\equiv A^qBA^{q+2}BA^2.$$

On voit par là que tout produit de transformations qui renferme plus de deux facteurs B peut être réduit à renfermer au plus deux facteurs. Toutes les transformations du groupe sont comprises dans les formes A^m, A^pBA^q, $A^p(ABAB)A^q$, où $ABAB$ a la forme:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right), & -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right), & \frac{-1-\sqrt{3}}{4}, & -i\sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right), & i\sqrt{\frac{3}{8}}, & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}$$

Ce groupe est celui qui est mentionné au § 44; il renferme 36 transformations.

55) L'équation (90) montre que le groupe du paragraphe précédent doit être un sous-groupe du groupe du 8^e^ ordre mentionné au § 44, en tant que ce dernier existe, et il est facile de voir par là qu'il n'est pas fini.

Par contre, le groupe du § 54 est un sous-groupe du groupe dont il est question au § 42, car en ajoutant aux transformations ci-dessus mentionnées du groupe du § 54 une transformation C de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = pz \quad \text{où} \quad pq = -1 \\ \mu z' = qy \end{cases}$$

on aura alors $CA \equiv A^{-1}C$ et, si l'on pose $p = \frac{i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ et $q = \frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$, il viendra $CBC^{-1} \equiv ABAB$.

On peut toujours, dans un produit $A^pC^qB\ldots$ faire passer C à la première place, et on voit alors que, si le groupe du § 54 renferme les transformations $T_1, T_2\ldots$, celui dont il s'agit ici renfermera les transformations $T_1, T_2\ldots CT_1, CT_2\ldots$, en tout 72 transformations.

56) Nous arrivons maintenant aux groupes du 5^e^ ordre. Ils peuvent renfermer:

a) des transformations du 2^e^, du 3^e^ et du 5^e^ ordre, ou

b) des transformations du 2^e^, du 3^e^, du 4^e^ et du 5^e^ ordre.

Dans le premier cas, en supposant toujours que les groupes renferment deux transformations A et B, A du 5^e^ et B du 2^e^ ordre, on peut avoir, suivant (90), s étant égal à -1 et d à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou:

$$s_1 = s_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad s_2 = s_3 = 0$$

ou:

$$s_1 = s_4 = 0, \quad s_2 = s_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On obtiendra le même groupe, soit qu'on prenne la première ou la seconde colonne des sommes principales. En prenant la seconde, on trouve:

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad b_2 = c_3 = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

De ce que ni A ni B ne transforment $x^2 + 2yz = 0$, il résulte que le groupe est fini; c'est le groupe icosaédrique du plan.

57) Dans le cas de b), l'équation (90) montre qu'on peut avoir les colonnes suivantes de sommes principales:

$s =$	-1	-1	-1	-1
$s_1 =$	0	d_1	$\alpha^p d$	α^p
$s_2 =$	d	0	α^p	$\bar{\alpha}^p d_1$
$s_3 =$	d	0	$\bar{\alpha}^p$	$\alpha^p d_1$
$s_4 =$	0	d_1	$\bar{\alpha}^p d$	$\bar{\alpha}^p$

et:

$s =$	1	d	d_1
$s_1 =$	$\alpha^p d_1$	1	0
$s_2 =$	$\bar{\alpha}^p d$	0	1
$s_3 =$	$\bar{\alpha}^p d$	0	1
$s_4 =$	$\alpha^p d_1$	1	0

où $p = 1$ ou 2, $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $d = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $d_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Peu importe quelles sont les colonnes d'où l'on part, supposé qu'on n'arrive pas à un sous-groupe, ce qui est le cas avec les deux premières. Nous partons donc de la 3e en posant $p = 1$. Il est maintenant facile de montrer qu'on peut trouver toutes les sommes principales possibles des transformations du groupe, en appliquant la proposition que la transformée d'une transformation ne fait pas varier la somme principale.

$C = s$ signifie ici que la transformation C a s pour somme principale.

Etant donné:

$$\begin{aligned} B &= -1 \\ AB &= \alpha d \\ A^2 B &= \alpha \\ A^3 B &= \bar{\alpha} \\ A^4 B &= \bar{\alpha} d. \end{aligned}$$

On a $BA^2B = d_1$, $A^2BA^2B = -\bar{\alpha}$ et, suivant le § 49, $A^4BA^2B = \alpha d_1$, puisque A^2BA^2B est du deuxième ordre. L'équation (90) donne alors:

$$\begin{aligned} BA^2B &= d_1 \\ ABA^2B &= \alpha \\ A^2BA^2B &= -\bar{\alpha} \\ A^3BA^2B &= 1 \\ A^4BA^2B &= \alpha d_1. \end{aligned}$$

Dans le texte danois, p. 193 et 194, on trouvera des tableaux de tous les produits de 4 facteurs et de quelques-uns de 6 facteurs.

Nous montrerons maintenant que le groupe est fini. Si l'on a un produit:

$$A^p B A^q B A^r B A^s \ldots$$

on peut d'abord supposer que deux exposants qui se suivent, q et r, ne sont pas égaux, puisque le nombre des facteurs du produit pourrait alors être réduit, $A^m B$ étant au plus du 5e ordre. De plus, à cause de la relation:

$$A^2 B A^2 B A^2 \equiv B A^3 B$$

qui est une conséquence de $(A^2 B)^4 \equiv 1$, on peut faire disparaître tout facteur A^3 placé entre deux facteurs B, pour que les exposants q et r puissent l'un et l'autre être considérés comme différents de 3.

Nous pouvons à présent montrer qu'aucun produit ne peut renfermer plus d'un certain nombre de facteurs sans être réductible.

En effet, si un produit renfermait une infinité de facteurs sans pouvoir être réduit, les facteurs A, A^2, A^4 devraient s'y trouver, car s'il ne contenait que deux de ces facteurs, il serait réductible, puisqu'on a $(A^p B A^q B)^m \equiv 1$, si m est au plus égal à 5.

Si le produit n'est pas réductible, il doit donc renfermer un des facteurs suivants:

1) $B A^4 B A^2 B A B$
2) $B A^4 B A B A^2 B$
3) $B A B A^2 B A^4 B$
4) $B A B A^4 B A^2 B$
5) $B A^2 B A B A^4 B$
6) $B A^2 B A^4 B A B$.

En remplaçant $B A^2 B$ par $A^3 B A^3 B A^3$, on voit de suite que 2) et 5) peuvent être réduits à renfermer un facteur B de moins.

Si dans 1) on fait précéder $B A^4$ d'un facteur $B A^l$, l doit être égal à 1, car on voit immédiatement que l ne peut être égal à 4, et s'il était égal a 2, on aurait:

$$\ldots B A^2 B A^4 B A^2 B A B \ldots \equiv B A^2 B A^2 B A^3 B A^4 B \ldots$$

qui est réductible. Il faut donc que $l = 1$, si quelque facteur $B A^l$ précède $B A^4$, et on aura alors la transformation:

$$\ldots B A B A^4 B A^2 B A B \ldots$$

produit qui, à son tour, peut être précédé d'un facteur $B A^k$, où $k = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$; mais, dans les deux cas, la transformation est réductible. On a en effet ou:

$$\ldots B A^4 B A B A^4 B A^2 B A B \ldots \equiv B A^4 B A B A^2 B A^3 B A^4 B \ldots \equiv \ldots B A^4 B A^4 B A^3 B A B A^4 B \ldots$$

ou bien:

$$\ldots B A^2 B A B A^4 B A^2 B A B \ldots \equiv \ldots A^3 B A^3 B A^4 B A^4 B A^2 B A B \ldots$$

Dans les deux cas, on voit que les transformations sont réductibles.

Par conséquent, 1) ne peut être précédé de facteurs renfermant B autres que BA, sans que la transformation soit réductible. On voit de même que 3) ne peut être suivi de facteurs renfermant B autres que AB, comme aussi qu'aucun facteur renfermant B ne peut être ajouté avant ou après 4) ou 6) sans que la transformation soit réductible. Mais il suit de là que le groupe est fini.

On trouvera p. 197 du texte danois un certain nombre de relations qui servent à réduire des produits de transformations à leur forme la plus simple, et p. 198 une schéma de toutes les transformations d'un groupe sous la forme la plus simple. On voit par ce schéma que ce groupe renferme 360 transformations.

58) Il nous reste à considérer un groupe du 7e ordre. Nous supposons comme d'habitude que le groupe renferme deux transformations A et B, A du 7e et B du 2e ordre, avec des coefficients réels. On a alors:

$$A = \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \alpha^2 x \\ \mu z' = \alpha^4 x \end{cases}$$

où α est une racine imaginaire arbitraire du 7e ordre de l'unité. Posons:

$$d = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$$

on aura par suite:

$$d + \bar{d} = -1 \quad \text{et} \quad d\bar{d} = 2.$$

En multipliant B par des puissances de A, on obtient, suivant (90), les colonnes possibles de sommes principales qui suivent:

s	-1	-1	-1
s_1	$\bar{d}$	0	1
s_2	1	$\bar{d}$	0
s_3	0	1	d
s_4	0	1	$\bar{d}$
s_5	1	d	0
s_6	d	0	1

On verra qu'il y a dans le groupe des transformations qui, multipliées par des puissances de A, donnent toutes trois colonnes de sommes principales.

Si l'on suppose que B, par sa multiplication par des puissances de A, donne des transformations dont les sommes principales forment la deuxième colonne, on aura:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-(\alpha + \bar{\alpha})}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = p \\ b_2 &= \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = q \\ c_3 &= \frac{-1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = r \end{aligned} \qquad (95)$$

p, q, r seront déplacés circulairement si, à la place de α, on met α^2 ou α^4. p, q, r ont entre eux les relations suivantes:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \qquad (96)$$

$$pq + qr + rp = 0 \qquad (97)$$

$$\left.\begin{aligned} p^2 + p &= rq \\ q^2 + q &= rp \\ r^2 + r &= pq \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

A l'aide de ces relations, on trouve :

$$B = \begin{vmatrix} p & r & q \\ r & q & p \\ q & p & r \end{vmatrix}$$

$A^{-2}BA^3BA^{-2}$ est de la forme:

$$B' = \begin{vmatrix} q & p & r \\ p & r & q \\ r & q & p \end{vmatrix}$$

qu'on obtient de B par un déplacement circulaire de p, q, r. Le groupe doit alors aussi renfermer la transformation B'', qui s'obtient par un nouveau déplacement circulaire de p, q, r. BB' est de la forme:

$$D = \begin{cases} \mu x' = y \\ \mu y' = z \\ \mu z' = x \end{cases}$$

et le groupe renferme donc aussi la transformation:

$$D' = \begin{cases} \mu x' = z \\ \mu y' = x \\ \mu z' = y \end{cases}$$

On pourrait maintenant montrer que le groupe peut renfermer des transformations de chacune des formes :

$$A^p,\quad A^m B A^n,\quad A^m B' A^n,\quad A^m B^n A^n,\quad DA^n,\quad D'A^n,$$

où les valeurs de p, m, n, peuvent varier de 0 à 6, car en multipliant l'une par l'autre deux de ces transformations, on obtient encore une transformation d'une de ces formes. On trouvera p. 204 du texte danois un schéma des transformations que renferme le groupe ; il y en a 168.